Exercice 2

1 En utilisant sa calculatrice, on conjecture facilement que cette affirmation est vraie. Pour le prouver, on va faire un raisonnement par récurrence en montrant que : pour tout n, on a $0 \leq U_{n+1} \leq U_n$

initialisation on a $U_0 = 10$

et $U_1 = \frac{1}{3} U_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 10 + 2 = \frac{16}{3}$

Donc on a bien $0 \leq U_1 \leq U_0$.

Hérédité on suppose $0 \leq U_{n+1} \leq U_n$

on en déduit $0 \leq \frac{1}{3} U_{n+1} \leq \frac{1}{3} U_n$ en multipliant par $\frac{1}{3}$

et ensuite $2 \leq \frac{1}{3} U_{n+1} + 2 \leq \frac{1}{3} U_n + 2$ en ajoutant 2

soit $(0 \leq) 2 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

et on obtient bien la propriété cherchée.

$\rightarrow$ affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

2 avec la question précédente, on sait que la suite (U_n) est convergente car elle est décroissante et minorée.

or on a $U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + 2$, et sa limite l va donc vérifier $l = \frac{1}{3} l + 2$

soit $\frac{2}{3} l = 2 \rightarrow l = \frac{6}{2} = 3 \neq 0$

$\rightarrow$ affirmation $\boxed{\text{FAUSSE}}$

3 on a $U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + 2$ et $V_n = U_n - 3$

$\hookrightarrow$ soit $U_n = V_n + 3$

on a donc
$$V_{n+1} = U_{n+1} - 3$$
$$= \frac{1}{3} U_n + 2 - 3$$
$$= \frac{1}{3}(V_n + 3) + 2 - 3 = \frac{1}{3} V_n + \underbrace{\frac{1}{3} \times 3 + 2 - 3}_{=0}$$

on obtient $V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n$

Donc (V_n) est bien géométrique $\rightarrow$ affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

(de raison $\frac{1}{3}$).

Partie 2

$\boxed{1}$ on suppose qu'il existe une fonction définie par
$f(x) = K$, avec K nombre réel.
on aura alors $f'(x) = 0$ pour tout x.
on se retrouve alors avec $f'(x) = \frac{3}{2} f(x) + 2$ car la fonction f
doit être une solution de (E).
on obtient donc : $0 = \frac{3}{2} \times K + 2$ soit $K = -\frac{4}{3}$
et la fonction définie par $f(x) = -\frac{4}{3}$ répond à la question
→ affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

$\boxed{2}$ La question précédente nous donne une solution particulière de (E).
Il nous reste à déterminer la solution générale de
l'équation homogène (E_0) : $y' = \frac{3}{2} y$.
Le cours nous donne cette solution générale de (E_0)
qui s'écrira sous la forme $x \to A e^{\frac{3}{2} x}$, $A \in \mathbb{R}$.
Donc f solution de (E) s'écrira :

$$f(x) = \underbrace{A e^{\frac{3}{2} x}}_{\text{solution générale de } (E_0)} \underbrace{- \frac{4}{3}}_{\text{solution particulière de (E)}}$$

or on veut $f(0) = 0$ → on en déduit $A \underbrace{e^{\frac{3}{2} \times 0}}_{= 1} - \frac{4}{3} = 0$

soit $A = \frac{4}{3}$

on a donc $f(x) = \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2} x} - \frac{4}{3}$ soit $f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2} x}$

c'est à dire $f'(x) = 2 e^{\frac{3}{2} x}$

et la tangente en 1 aura, pour coefficient directeur,
le nombre dérivé $f'(1) = 2 e^{\frac{3}{2} \times 1} = 2 e^{\frac{3}{2}}$

→ affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$