Bac Spé Maths 2024

Voici la correction complète

de l'épreuve 2

pour Amérique du Sud

Vendredi 22 Novembre 2024

Correction proposée par

Bruno Swiners

sur

www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie 1 $\boxed{1}$ on peut ici additionner les pourcentages et on a $p(Rh+) = p(A+) + p(O+) + p(B+) + p(AB+)$

$= 38{,}2\% + 36{,}5\% + 7{,}7\% + 2{,}5\%$

$= 84{,}9\% \longrightarrow p(Rh+) = \boxed{0{,}849}$.

$\boxed{2}$ on cherche $p_{Rh+}(A) = \dfrac{p(Rh+ \cap A)}{p(Rh+)} = \dfrac{p(A+)}{p(Rh+)} = \dfrac{0{,}382}{0{,}849} \approx \boxed{0{,}450}$

$\boxed{3}$ on cherche $p_{AB}(Rh-) = \dfrac{p(AB \cap Rh-)}{p(AB)} = \dfrac{p(AB-)}{p(AB)} = \dfrac{0{,}004}{0{,}029} \approx \boxed{0{,}138}$

on additionne $p(AB+)$ et $p(AB-)$
soit $2{,}5\% + 0{,}4\% = 2{,}9\% = 0{,}029$

Partie 2

$\boxed{1}$ a) on peut considérer que ce tirage parmi 50 personnes est constitué d'épreuves identiques et indépendantes, avec deux issues possibles (donneur universel ou non).
On a donc ici une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = p(O-) = 0{,}065$.
$\rightarrow$ à la calculatrice, on obtient $p(X=8) \approx \boxed{0{,}010}$

b) L'instruction "p = p + binomiale(i, 50, 0.065)" nous montre que la fonction va additionner au fur et à mesure les différentes probabilités obtenues.
Avec proba(8), on aura l'instruction "for i in range(9)" qui va amener à faire des boucles avec la variable i variant de 0 jusqu'à 8.
Cette fonction va donc nous donner $p(X \leq 8)$.
on a alors $p(X \leq 8) \approx \boxed{0{,}995}$
et on a une probabilité égale (environ) à 99,5 % d'avoir un nombre de donneurs universels inférieur ou égal à 8 dans un échantillon de 50 personnes.

$\boxed{2}$ c'est une question très classique en ce moment !!

on cherche n tel que $p(X \geq 1) \geq 0,999$

cela correspond à $1 - p(X=0) \geq 0,999$

soit $1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \underbrace{p^0}_{=1} (1-p)^n \geq 0,999$

on obtient alors $1 - (1-0,065)^n \geq 0,999$

soit $0,935^n \leq 0,001$

soit $\ln(0,935)^n \leq \ln 0,001$ car la fonction ln est croissante et elle conserve l'ordre.

on obtient $n \times \ln(0,935) \leq \ln(0,001)$

soit $n \geq \dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,935)}$

on a inversé car $\ln(0,935)$ est négatif.

or on a $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,935)} \simeq 102,78$

Donc il faudra un nombre minimal de $\boxed{103}$ personnes pour avoir la condition voulue.

Exercice 2

1 En utilisant sa calculatrice, on conjecture facilement que cette affirmation est vraie. Pour le prouver, on va faire un raisonnement par récurrence en montrant que : pour tout n, on a $0 \leq U_{n+1} \leq U_n$

__initialisation__ on a $U_0 = 10$

et $U_1 = \frac{1}{3} U_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 10 + 2 = \frac{16}{3}$

Donc on a bien $0 \leq U_1 \leq U_0$.

__Hérédité__ on suppose $0 \leq U_{n+1} \leq U_n$

on en déduit $0 \leq \frac{1}{3} U_{n+1} \leq \frac{1}{3} U_n$ en multipliant par $\frac{1}{3}$

et ensuite $2 \leq \frac{1}{3} U_{n+1} + 2 \leq \frac{1}{3} U_n + 2$ en ajoutant 2

soit $(0 \leq) 2 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

et on obtient bien la propriété cherchée.

$\rightarrow$ affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

2 avec la question précédente, on sait que la suite (U_n) est convergente car elle est décroissante et minorée.

or on a $U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + 2$, et sa limite l va donc vérifier $l = \frac{1}{3} l + 2$

soit $\frac{2}{3} l = 2 \rightarrow l = \frac{6}{2} = 3 \neq 0$

$\rightarrow$ affirmation $\boxed{\text{FAUSSE}}$

3 on a $U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + 2$ et $V_n = U_n - 3$

$\hookrightarrow$ soit $U_n = V_n + 3$

on a donc
$$V_{n+1} = U_{n+1} - 3$$
$$= \frac{1}{3} U_n + 2 - 3$$
$$= \frac{1}{3}(V_n + 3) + 2 - 3 = \frac{1}{3} V_n + \underbrace{\frac{1}{3} \times 3 + 2 - 3}_{=0}$$

on obtient $V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n$

Donc (V_n) est bien géométrique $\rightarrow$ affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

(de raison $\frac{1}{3}$).

Partie 2

$\boxed{1}$ on suppose qu'il existe une fonction définie par
$f(x) = K$, avec K nombre réel.
on aura alors $f'(x) = 0$ pour tout x.
On se retrouve alors avec $f'(x) = \frac{3}{2} f(x) + 2$ car la fonction f doit être une solution de (E).
on obtient donc : $0 = \frac{3}{2} \times K + 2$ soit $K = -\frac{4}{3}$
et la fonction définie par $f(x) = -\frac{4}{3}$ répond à la question
$\rightarrow$ affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

$\boxed{2}$ La question précédente nous donne une solution particulière de (E).
Il nous reste à déterminer la solution générale de l'équation homogène (E_0) : $y' = \frac{3}{2} y$.
Le cours nous donne cette solution générale de (E_0) qui s'écrira sous la forme $x \rightarrow Ae^{3/2 x}$, $A \in \mathbb{R}$.
Donc f solution de (E) s'écrira :

$$f(x) = \underbrace{Ae^{3/2 x}}_{\text{solution générale de } (E_0)} \underbrace{- \frac{4}{3}}_{\text{solution particulière de (E)}}$$

or on veut $f(0) = 0 \rightarrow$ on en déduit $A\underbrace{e^{3/2 \times 0}}_{=1} - \frac{4}{3} = 0$

soit $A = \frac{4}{3}$

on a donc $f(x) = \frac{4}{3} e^{3/2 x} - \frac{4}{3}$ soit $f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} e^{3/2 x}$

c'est à dire $f'(x) = 2e^{3/2 x}$

et la tangente en 1 aura, pour coefficient directeur, le nombre dérivé $f'(1) = 2e^{3/2 \times 1} = 2e^{3/2}$

$\rightarrow$ affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

Exercice 3

Partie 1

1 on a $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 4) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

et, par produit, on a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

mais, en $+\infty$, on aura une forme indéterminée.

On écrit alors $f(x) = x^2 e^{-x} - 4e^{-x}$

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ avec les croissances comparées

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 4e^{-x} = 0$

et, par différence, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{0}$

2 on aura $f'(x) = \underbrace{2x \times e^{-x}}_{u' \times v} + \underbrace{(x^2 - 4) \times (-e^{-x})}_{u \times v'}$

soit $f'(x) = 2x e^{-x} - (x^2 - 4) e^{-x}$

$= e^{-x}(2x - x^2 + 4) = (-x^2 + 2x + 4) e^{-x}$.

3 on aura $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc le signe de f' ne dépend que du signe du trinôme.

→ on calcule $\Delta = (2)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 20 > 0$

→ les deux racines sont : $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{20}}{-2} = 1 + \sqrt{5}$

et $x_2 = 1 - \sqrt{5}$

on en déduit :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	↘	$f(1-\sqrt{5}) \approx -3{,}5$	↗	$f(1+\sqrt{5}) \approx 0{,}25$	↘	0

signe du trinôme dont le coefficient a est négatif.

Partie 2

1 on a $I_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^0 e^{-x}\,dx = \int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{-2}^{0} = -e^{-0} - (-e^{-(-2)})$

soit $I_0 = -1 + e^2 = e^2 - 1$.

2) on a $I_{n+1} = \int_{-2}^{0} \underbrace{x^{n+1}}_{u} \times \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx$

↳ on utilise une intégration par parties avec :

$u(x) = x^{n+1} \longrightarrow u'(x) = (n+1)x^n$

$v'(x) = e^{-x} \longrightarrow v(x) = -e^{-x}$

On obtient $I_{n+1} = \left[\underbrace{x^{n+1} \times (-e^{-x})}_{u \times v}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} \underbrace{(n+1)x^n \times (-e^{-x})}_{u' \times v} dx$

soit $I_{n+1} = 0 - (-2)^{n+1}(-e^{-(-2)}) + (n+1)\int_{-2}^{0} x^n e^{-x} dx$

↳ $I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n$.

3) on a donc $I_1 = (-2)^{0+1} e^2 + (0+1) I_0 = -2e^2 + (e^2 - 1)$

$\longrightarrow \boxed{I_1 = -e^2 - 1}$

et on a $I_2 = (-2)^{1+1} e^2 + (1+1) I_1 = 4e^2 + 2(-e^2 - 1)$

$\longrightarrow \boxed{I_2 = 2e^2 - 2}$

Partie 3

1) on a $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc le signe de $f(x)$ ne dépend que du signe de $(x^2 - 4)$.

une étude rapide nous donne

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) La fonction f est négative sur l'intervalle $[-2;0]$.

On aura donc $S = -\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -\int_{-2}^{0} (x^2 - 4)e^{-x} dx$

on en déduit $S = -\int_{-2}^{0} x^2 e^{-x} dx + 4\int_{-2}^{0} e^{-x} dx$ on utilise la linéarité des intégrales.

↳ $S = -I_2 + 4\left[-e^{-x}\right]_{-2}^{0} = -I_2 + 4(-e^0 - (-e^{-(-2)}))$

↳ $S = -I_2 + 4(e^2 - 1) = -(2e^2 - 2) + 4e^2 - 4$

et on obtient $S = \boxed{2e^2 - 2}$ u.a.

Exercice 4

Partie 1

1) on va montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, non colinéaires, du plan (ABC).

on a $\vec{AB}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ soit $\vec{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 2-0 \end{pmatrix}$ soit $\vec{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

et on calcule $\vec{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\times 2 + 2\times 3 + 0\times 3 = \boxed{0}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\times 2 + 0\times 3 + 2\times 3 = \boxed{0}$

Donc on a bien $\vec{AB} \perp \vec{n}$ et $\vec{AC} \perp \vec{n}$.

Donc $\vec{n}$ est bien un vecteur normal au plan (ABC)

2) Les coordonnées de $\vec{n}$ seront donc les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne du plan (ABC).

on obtient donc : $2x + 3y + 3z + d = 0$

or on $A \in (ABC) \to 2\times \underset{x_A}{3} + 3\times \underset{y_A}{0} + 3\times \underset{z_A}{0} + d = 0 \to 6 + d = 0$

$\to d = -6$

on obtient, pour le plan (ABC), l'équation $2x+3y+3z-6=0$

3) on aura pour la droite (d) $\begin{cases} x = \boxed{0} + \boxed{2}\times t \\ y = \boxed{0} + \boxed{3}\times t \\ z = \boxed{0} + \boxed{3}\times t \end{cases} \to \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}$

point O vecteur directeur $\vec{n}$

4) on remplace, dans l'équation du plan (ABC), les x, y et z par leur expression de la représentation paramétrique de (d).

on obtient : $2\times(2t) + 3\times(3t) + 3\times(3t) - 6 = 0$

soit $4t + 9t + 9t - 6 = 0 \to 22t = 6 \to t = \frac{3}{11}$

et on obtient les coordonnées du point H

$\to H\begin{pmatrix} x = 2\times\frac{3}{11} = \frac{6}{11} \\ y = 3\times\frac{3}{11} = \frac{9}{11} \\ z = 3\times\frac{3}{11} = \frac{9}{11} \end{pmatrix}$

5) La distance cherchée correspond donc à la distance OH.

on a $OH = \sqrt{(x_H - x_O)^2 + (y_H - y_O)^2 + (z_H - z_O)^2}$

soit $OH = \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{198}{121}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$

Partie 2

1) on prend le triangle OAB comme base (triangle rectangle) et la hauteur associée sera OC

on a donc $V_{OABC} = \frac{1}{3} \times Aire_{OAB} \times OC = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\overset{OA}{3} \times \overset{OB}{2}}{2}\right) \times 2 = \boxed{2}$

2) on va exprimer ce volume en prenant ABC comme base et la hauteur associée sera donc OH.

on a donc $V_{OABC} = 2 = \frac{1}{3} \times Aire_{ABC} \times OH$

soit $2 = \frac{1}{\cancel{3}} \times Aire_{ABC} \times \frac{\cancel{3}\sqrt{22}}{11}$.

soit $Aire_{ABC} = 2 \times \frac{11}{\sqrt{22}} = \frac{22}{\sqrt{22}} = \boxed{\sqrt{22}}$

3) on a donc $(Aire_{ABC})^2 = (\sqrt{22})^2 = \boxed{22}$

et on a $(Aire_{OAB})^2 + (Aire_{OBC})^2 + (Aire_{OAC})^2$

$= \left(\frac{OA \times OB}{2}\right)^2 + \left(\frac{OB \times OC}{2}\right)^2 + \left(\frac{OA \times OC}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{3 \times 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 \times 2}{2}\right)^2$

$= 3^2 + 2^2 + 3^2 = \boxed{22}$

d'où le résultat qu'il fallait démontrer.