Exercice 1

AFFIRMATION 1

$\vec{n}$ devrait être orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de (OAC).

On a $\vec{OA}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{OC}\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$ qui sont clairement non colinéaires

on calcule $5:2=2{,}5$
et $0:1=0\neq 2{,}5$.

on calcule $\vec{n}\cdot\vec{OA}=1\times 2+0\times 1+2\times(-1)=\boxed{0}$

et $\vec{n}\cdot\vec{OC}=1\times 5+0\times 0+2\times(-3)=\boxed{-1}\neq 0$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{OA}$ mais $\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\vec{OC}$ $\rightarrow$ $\vec{n}$ n'est pas normal au plan (OAC) $\rightarrow$ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 2

Le plus simple est ici de trouver une représentation paramétrique de (AB) et de chercher directement s'il y a un point d'intersection.

on calcule $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\2-1\\1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ et on obtient pour

la droite (AB) $\begin{cases}x=2+(-3)\times k\\y=1+1\times k\\z=-1+2\times k\end{cases}$

bien prendre une autre lettre que t pour ce paramètre.

point A

vecteur $\vec{AB}$

on résout le système $\begin{cases}-t+3=2-3k\\t+2=1+k\\2t+1=-1+2k\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-(-1+k)+3=2-3k\\t=-1+k\\2(-1+k)+1=-1+2k\end{cases}$

on remplace t par $-1+k$!!

on obtient $\begin{cases}1-k+3=2-3k\\t=-1+k\\-2+2k+1=-1+2k\end{cases}$ $\begin{matrix}\longrightarrow 2k=-2\rightarrow k=-1\\\longrightarrow t=-1+k\\\longrightarrow -1=-1\rightarrow \text{c'est vrai !}\end{matrix}$

Le système admet bien une solution avec $k=-1$ et $t=-1-1=-2$.

on obtient le point d'intersection en remplaçant t par -2

$\hookrightarrow\begin{cases}x=-(-2)+3=5\\y=-2+2=0\\z=2\times(-2)+1=-3\end{cases}$ $\rightarrow$ c'est bien le point C.

$\rightarrow\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 3

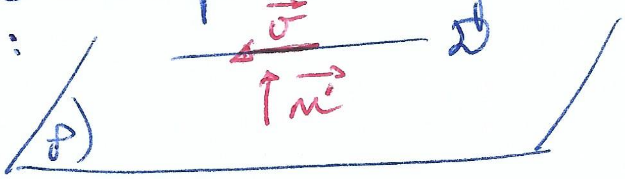
Un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite D sera $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ — ce sont les coefficients du paramètre t.

Un vecteur normal $\vec{n'}$ au plan P sera $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$ — ce sont les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne de P.

On calcule $\vec{v}\cdot\vec{n'} = -1\times1+1\times5+2\times(-2)=0$

Donc on a $\vec{v}\perp\vec{n'} \rightarrow$ la droite D est parallèle au plan P.

croquis :



$\rightarrow$ $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 4

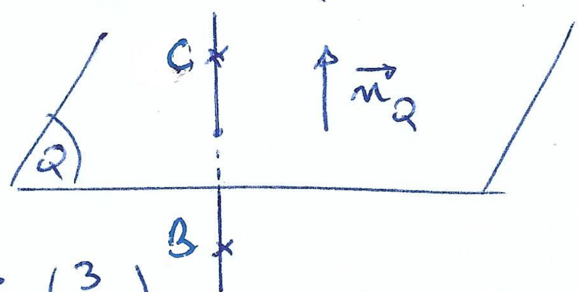
On note I le milieu de $[BC]$ et on vérifie que $I\in Q$.

↳ on aura $I\begin{pmatrix}\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-1+5}{2}\\ \frac{y_B+y_C}{2}=\frac{2+0}{2}\\ \frac{z_B+z_C}{2}=\frac{1+(-3)}{2}\end{pmatrix}$ soit $I\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

et on a bien $3\times\underset{x_I}{2}-\underset{y_I}{1}-2\times(\underset{z_I}{-1})-7=0 \rightarrow$ on a $I\in Q$.

De plus, on vérifie que $\vec{BC}$ est colinéaire à $\vec{n_Q}$, vecteur normal au plan Q.

croquis



On aura $\vec{BC}\begin{pmatrix}5-(-1)\\0-2\\-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{n_Q}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$

on constate que $\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}=2\times\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et donc $\vec{BC}=2\vec{n_Q}$

↳ $\vec{BC}$ est bien colinéaire à $\vec{n_Q}$.

et on a bien les deux conditions voulues :

le plan Q passe bien par le milieu de $[BC]$

et on a bien $(BC)\perp Q$.

$\rightarrow$ $\boxed{\text{VRAIE}}$