Bac Spé Maths 2024
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour la Polynésie
Mercredi 19 Juin 2024

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

AFFIRMATION 1

$\vec{n}$ devrait être orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de (OAC).

On a $\vec{OA}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{OC}\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$ qui sont clairement non colinéaires

on calcule $5:2=2,5$
et $0:1=0\neq 2,5$.

on calcule $\vec{n}\cdot\vec{OA}=1\times2+0\times1+2\times(-1)=\boxed{0}$

et $\vec{n}\cdot\vec{OC}=1\times5+0\times0+2\times(-3)=\boxed{-1}\neq0$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{OA}$ mais $\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\vec{OC}$ $\rightarrow$ $\vec{n}$ n'est pas normal au plan (OAC) $\rightarrow$ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 2

Le plus simple est ici de trouver une représentation paramétrique de (AB) et de chercher directement s'il y a un point d'intersection.

on calcule $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\2-1\\1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ et on obtient pour

la droite (AB) $\begin{cases}x=2+(-3)\times k\\y=1+1\times k\\z=-1+2\times k\end{cases}$

bien prendre une autre lettre que t pour ce paramètre.

point A

vecteur $\vec{AB}$

on résout le système $\begin{cases}-t+3=2-3k\\t+2=1+k\\2t+1=-1+2k\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-(-1+k)+3=2-3k\\t=-1+k\\2(-1+k)+1=-1+2k\end{cases}$

on remplace t par $-1+k$!!

on obtient $\begin{cases}1-k+3=2-3k & \rightarrow 2k=-2\rightarrow k=-1\\t=-1+k & \rightarrow t=-1+k\\-2+2k+1=-1+2k & \rightarrow -1=-1\rightarrow \text{c'est vrai !}\end{cases}$

Le système admet bien une solution avec $k=-1$
et $t=-1-1=-2$.

on obtient le point d'intersection en remplaçant t par -2

$\hookrightarrow\begin{cases}x=-(-2)+3=5\\y=-2+2=0\\z=2\times(-2)+1=-3\end{cases}$ $\rightarrow$ c'est bien le point C.

$\rightarrow\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 3

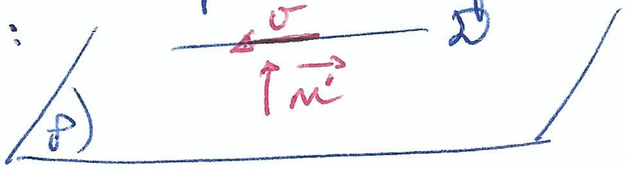
Un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite D sera $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ce sont les coefficients du paramètre t.

Un vecteur normal $\vec{n}$ au plan P sera $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$ ce sont les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne de P.

On calcule $\vec{v}\cdot\vec{n} = -1\times1+1\times5+2\times(-2)=0$

Donc on a $\vec{v}\perp\vec{n} \rightarrow$ la droite D est parallèle au plan P.

croquis :



$\rightarrow$ $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 4

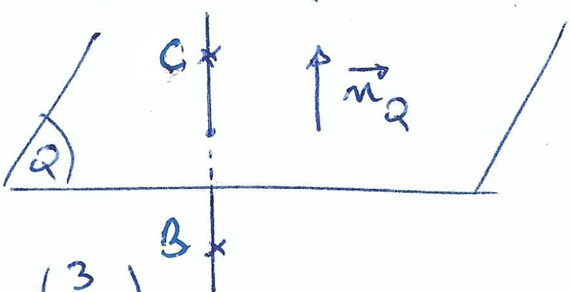
On note I le milieu de $[BC]$ et on vérifie que $I\in Q$.

$\hookrightarrow$ on aura $I\begin{pmatrix}\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{-1+5}{2}\\ \dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{2+0}{2}\\ \dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{1+(-3)}{2}\end{pmatrix}$ soit $I\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

et on a bien $3\times \underset{x_I}{2} - \underset{y_I}{1} - 2\times(\underset{z_I}{-1}) - 7 = 0 \rightarrow$ on a $I\in Q$.

De plus, on vérifie que $\vec{BC}$ est colinéaire à $\vec{n_Q}$, vecteur normal au plan Q.

croquis



On aura $\vec{BC}\begin{pmatrix}5-(-1)\\0-2\\-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{n_Q}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$

on constate que $\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}=2\times\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et donc $\vec{BC}=2\vec{n_Q}$

$\hookrightarrow$ $\vec{BC}$ est bien colinéaire à $\vec{n_Q}$.

et on a bien les deux conditions voulues :

le plan Q passe bien par le milieu de $[BC]$

et on a bien $(BC)\perp Q$. $\rightarrow$ $\boxed{\text{VRAIE}}$

Exercice 2

Partie A

$\boxed{1}$ L'énoncé amène à faire une simple vérification.

On a $f(t) = ke^{-0,02t} + 50m$ — c'est une constante ! (dérivée nulle !)

Donc on a $f'(t) = k \times (-0,02)e^{-0,02t}$

et on vérifie $f'(t) + 0,02f(t)$

$= -0,02\cancel{ke^{-0,02t}} + 0,02(\cancel{ke^{-0,02t}} + 50m) = 0,02 \times 50m$
$= m$.

La fonction f est bien solution de $(E) : y' + 0,02y = m$.

$\boxed{2}$ On a $f(t) = ke^{-0,02t} + 50m$ et on veut $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 30$

or on a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,02t} = 0$

soit $\lim\limits_{t \to +\infty} (ke^{-0,02t} + 50m) = 50m$

↳ on veut donc $50m = 30$ soit $m = \frac{30}{50} = \boxed{0,6}$.

$\boxed{3}$ on a donc $f(t) = ke^{-0,02t} + 30$ $50 \times 0,6$

et on veut $f(0) = 210$

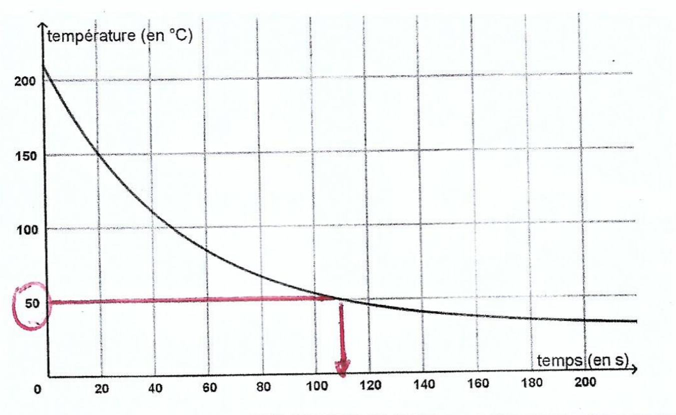
or on a $f(0) = k\underbrace{e^{-0,02 \times 0}}_{=1} + 30 = k + 30$

↳ on veut donc $k + 30 = 210$ soit $\boxed{k = 180}$

et on a donc $\boxed{f(t) = 180e^{-0,02t} + 30}$

Partie B

$\boxed{1}\boxed{a}$



Par lecture graphique, on obtient $\boxed{T \simeq 110\,s}$

(5) on résout $f(t) \leq 50$

soit $180\,e^{-0,02t} + 30 \leq 50$

soit $e^{-0,02t} \leq \frac{1}{9}$ $\qquad \frac{50-30}{180} = \frac{20}{180} = \frac{1}{9}$

on applique la fonction ln qui est croissante sur $]0;+\infty[$ et, donc, qui conserve l'ordre.

on obtient $\ln e^{-0,02t} \leq \ln\left(\frac{1}{9}\right)$

soit $-0,02t \leq \ln\left(\frac{1}{9}\right)$

soit $t \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{-0,02} \approx 109,86$ $\quad$ on a divisé par un nombre négatif → inversion de l'inégalité.

on obtient donc $\boxed{T = \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{-0,02} \approx 110\,s}$

[2] La valeur moyenne cherchée est $\frac{1}{100-0} \times \int_0^{100} f(t)\,dt$

et on sait qu'une primitive de $e^{-0,02t}$ sera $\frac{e^{-0,02t}}{-0,02}$.

Donc la valeur moyenne sera égale à :

$$\frac{1}{100} \times \left[180 \times \frac{e^{-0,02t}}{-0,02} + 30t\right]_0^{100}$$

$$= \frac{1}{100} \times \left(180 \times \frac{e^{-0,02 \times 100}}{-0,02} + 30 \times 100 - 180 \times \frac{\overbrace{e^{-0,02 \times 0}}^{=1}}{-0,02}\right)$$

$\approx 107,82\,°C \approx 108\,°C$.

Exercice 3

Partie A

1) on peut considérer ici une serie d'épreuves indépendantes, se passant d'une façon identique et avec 2 issues possibles.
On a donc une loi binomiale de paramètres $n = 3$
et $p = p(\text{Face}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

2) on utilise la calculatrice et on obtient :

$$p(X=0) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$
$$p(X=1) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$
$$p(X=2) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$
$$p(X=3) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

et on obtient donc le tableau suivant.

k	0	1	2	3
$p(X=k)$	$\frac{1}{8}$ ou 0,125	$\frac{3}{8}$ ou 0,375	$\frac{3}{8}$ ou 0,375	$\frac{1}{8}$ ou 0,125

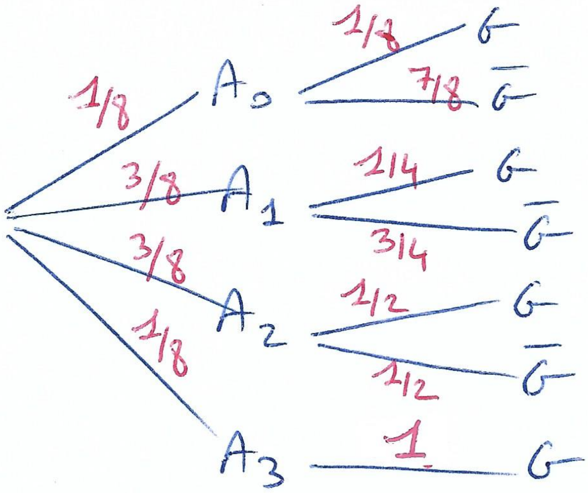
Partie B

1) Pour l'évènement "G sachant A_1", le joueur a obtenu 1 pièce du côté "Face" au premier essai et il ne lui reste donc que 2 pièces pour son deuxième essai.
Les quatre possibilités pour ce deuxième essai sont donc :
Pile / Pile ou Pile / Face ou Face / Pile ou Face / Face
La partie n'est gagnée que s'il obtient face / face (pour bien avoir les trois pièces du côté "Face"), ce qui correspond à une probabilité de "une chance sur quatre"
→ soit $P_{A_1}(G) = \frac{1}{4}$

2) $P_{A_0}(G)$ correspond à $p(A_3)$ car on fait une nouvelle partie avec les trois mêmes pièces → $P_{A_0}(G) = p(A_3) = \frac{1}{8}$

et $P_{A_2}(G)$ est égale à $\frac{1}{2}$ car on conserve ici 2 pièces et on fait une nouvelle partie avec une seule pièce soit une chance sur deux d'obtenir le côté "Face".

On en déduit le tableau suivant



$\boxed{3}$ Avec la formule des probabilités totales, on a :

$$p(G) = p(G \cap A_0) + p(G \cap A_1) + p(G \cap A_2) + p(G \cap A_3)$$
$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 1$$
$$= \frac{1}{64} + \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{27}{64}}$$

$\boxed{4}$ on cherche $p_G(A_1) = \dfrac{p(A_1 \cap G)}{p(G)} = \dfrac{3/8 \times 1/4}{27/64} = \dfrac{3/32}{27/64} = \boxed{\dfrac{6}{27}} = \boxed{\dfrac{2}{9}}$

$\boxed{5}$ on considère ici $\boxed{n}$ parties jouées de façon identique et indépendantes, avec deux issues possibles (G ou $\overline{G}$)

→ la variable aléatoire Y donnant le nombre de parties gagnées va suivre une loi binomiale de paramètres n et $p = p(G) = \dfrac{27}{64}$

et on cherche n pour que $p(Y \geq 1) \geq 0,95$

on utilise alors l'égalité $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$

$$= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0}$$

L'inégalité devient $1 - \left(1 - \dfrac{27}{64}\right)^n \geq 0,95$

soit $\left(\dfrac{37}{64}\right)^n \leq 0,05 \rightarrow \ln\left(\dfrac{37}{64}\right)^n \leq \ln 0,05$

on obtient donc : $n \times \ln\left(\dfrac{37}{64}\right) \leq \ln 0,05$

soit $n \geq \dfrac{\ln 0,05}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \simeq 5,46 \rightarrow$ soit à partir de 6 parties !!

ne pas oublier cette inversion car $\ln\left(\frac{37}{64}\right)$ est négatif.

Exercice 4

Partie A

1 on aura

```
def suite(n) :
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4/(5-u)
    return u
```

2 suite(2) va ici renvoyer la valeur de U_2 car l'instruction "for i in range(2)" va amener 2 itérations avec le compteur i qui va être égal à 0 et à 1.

⚠ avec range(n), i commence à 0 et s'arrête à (n−1).

on obtient $U_1 = \frac{4}{5-U_0} = \frac{4}{5-3} = \boxed{2}$ et $U_2 = \frac{4}{5-U_1} = \frac{4}{5-2} = \boxed{\frac{4}{3}} \approx 1{,}33$

3 il semblerait que la suite soit décroissante et qu'elle converge vers 1.

Partie B

1 on peut utiliser la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

et on obtient $f'(x) = 4 \times \left(\frac{-(-1)}{(5-x)^2}\right) = \frac{4}{(5-x)^2} > 0$ sur $]-\infty ; 5[$.

Donc f est bien croissante sur $]-\infty ; 5[$.

2 initialisation

On a $U_0 = 3$ et $U_1 = 2$

Donc on a bien $1 \leq U_1 \leq U_0 \leq 4$

hérédité

on suppose $1 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 4$

et on applique la fonction f qui est croissante sur $]-\infty ; 5[$ et qui va donc CONSERVER l'ordre.

on obtient $f(1) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n) \leq f(4)$

et on a bien $1 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 4$

$f(1) = \frac{4}{5-1} = 1$

$f(4) = \frac{4}{5-4} = 4$

↳ la propriété qui était supposée vraie au rang n reste vraie au rang (n+1).

$\boxed{3}$ $\boxed{a}$ on a $f(x) = x \iff \dfrac{4}{5-x} = x \iff 4 = x(5-x)$

$\iff 4 = 5x - x^2$

$\iff x^2 - 5x + 4 = 0$.

$\boxed{b}$ on résout $f(x) = x$ c'est à dire $x^2 - 5x + 4 = 0$
et en résolvant cette équation du second degré,
on obtient $S = \{1 ; 4\}$

$\boxed{4}$ avec la question 2, on sait que :
la suite (U_n) est décroissante car $U_{n+1} \leq U_n$
et la suite (U_n) est minorée car on a $U_n \geq 1$.
Donc la suite (U_n) est convergente.
La fonction f étant bien continue sur $]-\infty ; 5[$,
le théorème de la convergence monotone nous indique
que la limite ℓ de la suite va vérifier $f(\ell) = \ell$.
Donc la limite ℓ sera égale à 1 ou à 4 (question 3) b)).
or on a $U_0 = 3$, avec une suite décroissante, et la
limite ne peut être égale à 4. On a $\boxed{\ell = 1}$

$\boxed{5}$ on obtient une suite constante
car avec $U_0 = \boxed{4}$, on obtient $U_1 = \dfrac{4}{5-4} = \dfrac{4}{1} = \boxed{4}$

et ainsi de suite pour U_2, U_3 ....