Exercice 4

Partie A

1 **a** on a $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x-2 = -2$

et, par somme, on a donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \boxed{-\infty}$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x-2 = +\infty$

et, par somme, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

b on calcule $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \boxed{\frac{2x+1}{2x}}$

c sur $]0;+\infty[$, on a $2x+1 > 0$ et $2x > 0$

c'està dire positif !

et donc on a $f'(x) = \frac{2x+1}{2x} > 0$ sur $]0;+\infty[$

et donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

d on calcule $f''(x) = \frac{\overset{u'}{2} \times \overset{v}{2x} - \overset{u}{(2x+1)} \times \overset{v'}{2}}{\underbrace{(2x)^2}_{v^2}} = \frac{\cancel{4x} - \cancel{4x} - 2}{(2x)^2}$.

↳ on a donc $f''(x) = \frac{-2}{(2x)^2}$ qui est négative sur $]0;+\infty[$.

La fonction est donc $\boxed{\text{concave}}$ sur $]0;+\infty[$.

2 **a** La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ avec $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

et le nombre 0 appartient bien à l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet bien une solution unique sur $]0;+\infty[$.

De plus, on a $f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2} \times \underbrace{\ln 1}_{0} = -1 < 0$

et $f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2} \times \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0{,}35 > 0$

Donc on a finalement $0 \in [f(1); f(2)]$

et on aura $\alpha \in [1;2]$.

b on va visualiser ici le tableau de variations de f

x	0		α		$+\infty$
variations de f	$-\infty$	↗ $\boxed{-}$	0	↗ $\boxed{+}$	$+\infty$

et, donc, on a $f(x) \leq 0$ sur $]0; \alpha]$ et $f(x) \geq 0$ sur $[\alpha; +\infty[$.

ⓒ on sait que α vérifie l'égalité $f(\alpha) = 0$.

on en déduit $\alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0$

soit $\frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha \longrightarrow \boxed{\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)}$

Partie B

$\boxed{1}$ on a $g'(x) = -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \frac{1}{4}\left(\underbrace{2x \times \ln x}_{u' \times v} + \underbrace{x^2 \times \frac{1}{x}}_{u \times v'}\right)$

soit $g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}(2x\ln x + x)$

$= -\frac{7}{4}x - \frac{1}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x = -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x$

et on calcule $x f\left(\frac{1}{x}\right) = x \times \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

on a $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln 1 - \ln x = -\ln x$

$= 1 - 2x + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$= 1 - 2x - \frac{1}{2}x\ln x = g'(x) \longrightarrow \boxed{\text{OK}}$

$\boxed{2}$ $\boxed{a}$ on a $x \in]0; \frac{1}{\alpha}[$ alors on a $0 < x < \frac{1}{\alpha}$

et donc on a $\frac{1}{x} > \alpha$

et donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ d'après le A)2)b).

$\boxed{b}$ on a $g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$

et, donc, sur $]0; 1]$, le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (car x est positif).

On en déduit :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
signe de g'		$+$	0	$-$	
variations de g		$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C

$\boxed{1}$ a) on calcule $g(x) - y = -\cancel{\frac{7}{8}x^2} + \cancel{x} - \frac{1}{4}x^2\ln x - \left(-\cancel{\frac{7}{8}x^2} + \cancel{x}\right)$

$$= -\frac{1}{4}x^2 \ln x$$

≤ 0 $\qquad$ ≤ 0 sur $]0;1]$

Donc on a $g(x) - y \geq 0$ sur $]0;1]$

et on a bien $\mathcal{C}_g$ au dessus de P sur $]0;1]$.

b) on va réaliser une intégration par parties

avec $u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2 \rightarrow v(x) = \frac{x^3}{3}$

on obtient : $\displaystyle\int_{1/\alpha}^{1} \underbrace{x^2}_{v'} \times \underbrace{\ln x}_{u}\, dx = \Big[\underbrace{\ln x}_{u} \times \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v}\Big]_{1/\alpha}^{1} - \int_{1/\alpha}^{1} \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\, dx$

↳ on va noter I cette intégrale.

On obtient : $I = \underbrace{\ln 1}_{=0} \times \frac{1^3}{3} - \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \times \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3}{3} - \frac{1}{3}\displaystyle\int_{1/\alpha}^{1} x^2\, dx$

$\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln\alpha$

soit $I = \ln(\alpha) \times \frac{1}{3\alpha^3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} = \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\alpha^3}\right)$

or on sait que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$ → partie A 2) c)

↳ on obtient $I = \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{6(2-\alpha) - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$

soit $I = \displaystyle\int_{1/\alpha}^{1} x^2 \ln x\, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$

$\boxed{2}$ on a $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} (g(x) - y)\, dx = \int_{1/\alpha}^{1} \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln x\right) dx = -\frac{1}{4} \times \int_{1/\alpha}^{1} x^2 \ln x\, dx$

soit $\boxed{\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}} = \boxed{\frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}}$