Exercice 3

1 a) On va montrer que $\vec{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD).

On a $\vec{CA}\begin{pmatrix}5-0\\5-0\\0-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\-\frac{5}{2}-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$

et on calcule $\vec{n_1}\cdot\vec{CA}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}=1\times5+(-1)\times5+0\times(-10)=\boxed{0}$

et $\vec{n_1}\cdot\vec{CD}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}=1\times0+(-1)\times0+0\times(-\frac{25}{2})=\boxed{0}$

On a donc bien $\vec{n_1}\perp\vec{CA}$ et $\vec{n_1}\perp\vec{CD}$ $\rightarrow$ $\boxed{\vec{n_1}\text{ est normal à (CAD)}}$

b) Les coordonnées de $\vec{n_1}$ seront les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne du plan (CAD).

On obtient : $\underset{a}{1}\times x+(\underset{b}{-1})\times y+\underset{c}{0}\times z+d=0$

soit $x-y+d=0$

or le point $C\in(CAD)$ donc on a : $\underset{x_C}{0}-\underset{y_C}{0}+d=0\rightarrow d=0$

et on obtient l'équation du plan (CAD) : $\boxed{x-y=0}$

2 a) On remplace les coordonnées de la droite $\mathcal{D}$ dans l'équation du plan (CAD).

On obtient : $\frac{5}{2}t-(5-\frac{5}{2}t)=0$

soit $5t-5=0$ c'est à dire $\boxed{t=1}$

et on remplace t par 1 dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$

on obtient le point H $\begin{pmatrix}x=\frac{5}{2}\times1\\y=5-\frac{5}{2}\times1\\z=0\end{pmatrix}$ soit $H\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$

b) il faut ici vérifier que $H\in(CAD)$ et que $\vec{HB}\perp(CAD)$ c'est à dire $\vec{HB}$ colinéaire à $\vec{n_1}$ (vecteur normal au plan (CAD)).

↳ pour $H\in(CAD)$, on vérifie que l'on a bien $x_H-y_H=0$ soit $\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=0$ $\rightarrow$ $\boxed{OK}$

↳ pour $\overrightarrow{HB}$ colinéaire à $\vec{n}_1$ c'est $\vec{n}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

on calcule $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 0 - 5/2 \\ 5 - 5/2 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est égal à $-\frac{5}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{HB} = -\frac{5}{2}\vec{n}_1$ et $\overrightarrow{HB}$ est bien colinéaire à $\vec{n}_1$ → $\boxed{\text{OK}}$

3 a on sait ici que l'angle droit sera sur le point H et il suffit donc de montrer que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

on a $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} 5 - 5/2 \\ 5 - 5/2 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on sait que $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

on calcule $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \frac{5}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right) + 0 \times 0 = \boxed{0}$

Donc on a bien $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{HB}$ et ABH est bien rectangle en H.

b on aura donc $\text{Aire}_{ABH} = \dfrac{HA \times HB}{2}$

avec $HA = \|\overrightarrow{HA}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

et $HB = \|\overrightarrow{HB}\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

On a donc $\text{Aire}_{ABH} = \dfrac{\frac{\sqrt{50}}{2} \times \frac{\sqrt{50}}{2}}{2} = \boxed{\frac{25}{4}} = \boxed{6{,}25}$ u.a.

4 a il suffit de montrer ici que $\overrightarrow{OC} \perp (ABH)$.

On a $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 - 5 \\ 5 - 5 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

on calcule $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times (-5) + 0 \times 0 + 10 \times 0 = \boxed{0}$

et $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{HA} = 0 \times \frac{5}{2} + 0 \times \frac{5}{2} + 10 \times 0 = \boxed{0}$

On a donc bien $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{HA}$.

Donc on a bien $\overrightarrow{OC} \perp (ABH)$

et (CO) est bien la hauteur souhaitée issue de C.

b on va prendre ici le triangle ABH comme base et la droite (CO) comme hauteur du tétraèdre.

↳ on aura $V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABH} \times OC$

on sait que $\text{Aire}_{ABH} = \frac{25}{4}$

et on a $OC = \|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{0^2+0^2+10^2} = 10$

On en déduit $V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 = \boxed{\frac{125}{6}}$ u.v.

$\boxed{5}$ La distance cherchée correspond à la hauteur du tétraèdre ABCH issue du point H. Et, dans ce cas, la base correspondante sera le triangle (rectangle) ABC.

On sait déjà que $V_{ABCH} = \frac{125}{6}$ et on va exprimer ce volume avec cette "nouvelle" base et hauteur.

On aura donc $V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times Aire_{ABC} \times h$

c'est la distance cherchée

on calcule alors $Aire_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2}$ car le triangle ABC est rectangle en B.

avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix} \to AB = \sqrt{(-5)^2+0^2+0^2} = 5$

et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix} \to BC = \sqrt{0^2+(-5)^2+10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

On a donc $Aire_{ABC} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$

et on reprend la valeur de V_{ABCH}.

On a : $V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times Aire_{ABC} \times h$

$\frac{125}{6}$ $\qquad$ $\frac{25\sqrt{5}}{2}$

soit $\frac{125}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{5}}{2} \times h$

soit $h = \frac{125}{25\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \boxed{\sqrt{5}}$

c'est bien la distance cherchée entre le point H et le plan (ABC).