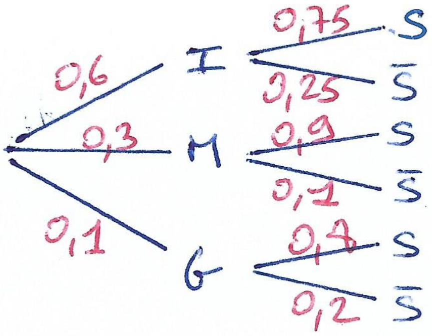
Exercice 2

1) on a l'arbre suivant



2) on calcule $p(I \cap S) = p(I) \times p_I(S)$

$$= 0,6 \times 0,75 = \boxed{0,45}$$

3) on utilise la formule des probabilités totales

$$p(S) = p(I \cap S) + p(M \cap S) + p(G \cap S)$$

$$= 0,45 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8$$

soit $\boxed{p(S) = 0,8}$

4) on cherche $p_S(I) = \dfrac{p(I \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,45}{0,8} \approx \boxed{0,563}$

5) a) on considère que l'on a bien un tirage qui se déroule de façon identique et indépendante, avec deux issues possibles $\rightarrow$ on a donc bien une loi binomiale de paramètres $\boxed{n = 30}$ et $\boxed{p = p(S) = 0,8}$.

b) on veut calculer $p(X \geq 25)$

et, suivant votre calculatrice, il faut utiliser l'égalité suivante : $p(X \geq 25) = 1 - p(X \leq 24)$.

$\rightarrow$ on obtient $p(X \geq 25) \approx \boxed{0,427}$

6) La phrase de l'énoncé "au moins un client non satisfait" nous amène à chercher $p(\bar{S} \geq 1) \geq 0,99$ avec $p(\bar{S}) = 0,2$

cela correspond à résoudre $1 - p(\bar{S} = 0) \geq 0,99$

soit $1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{0,2^0}_{=1} \times (1 - 0,2)^n \geq 0,99$

L'inéquation devient $1 - (0,8)^n \geq 0,99$

soit $(0,8)^n \leq 0,01$ (1 − 0,99)

on obtient : $\ln(0{,}8)^n \leq \ln(0{,}01)$

$$n \times \ln(0{,}8) \leq \ln(0{,}01)$$

$$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx \boxed{20{,}6}$$

on a inversé l'inégalité car $\ln(0{,}8)$ est négatif

On a donc la condition voulue à partir de $\boxed{21 \text{ clients}}$

$\boxed{7}$ $\boxed{a}$ On a $E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2)$
$= 4 + 3 = \boxed{7 \text{ jours}}$

et, puisque les variables sont indépendantes, on a
$V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = \boxed{3}$.

$\boxed{b}$ on cherche $p(5 \leq T \leq 9)$ soit ici $p(|T - 7| \leq 2)$

car on a $E(T) = 7$.

on reconnait ici l'utilisation de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, en passant par l'évènement contraire de $|T-7| \leq 2$ qui sera $|T-7| \geq 3$.

L'inégalité de Bienaymé Tchebychev nous donne :

$$p(|T-7| \geq 3) \leq \frac{V(T)}{3^2}$$

soit $p(|T-7| \geq 3) \leq \frac{3}{3^2}$

soit $p(|T-7| \geq 3) \leq \frac{1}{3}$

et, en prenant l'évènement contraire, on obtient :

$$1 - p(|T-7| \leq 2) \leq \frac{1}{3}$$

soit $p(|T-7| \leq 2) \geq 1 - \frac{1}{3}$

c'est à dire $p(|T-7| \leq 2) \geq \frac{2}{3}$

↳ on a bien le résultat demandé !