Exercice 1

AFFIRMATION 1 : on calcule ici la limite en $+\infty$.

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et, en utilisant le théorème des croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$.

On obtient donc $\lim\limits_{x \to \boxed{+\infty}} f(x) = \boxed{0}$ c'est bien l'axe des abscisses

→ asymptote horizontale d'équation $y = 0$ → $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 2 : on calcule $f'(x) = \underbrace{5 \times e^{-x}}_{u' \times v} + \underbrace{5x \times (-e^{-x})}_{u \times v'}$

on a donc $f'(x) + f(x) = \underbrace{5e^{-x} - 5xe^{-x}}_{f'(x)} + \underbrace{5xe^{-x}}_{f(x)} = 5e^{-x}$

Donc f est bien une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + y = 5e^{-x}$

→ $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 3 :

on sait qu'une suite peut être bornée sans être convergente.

On va donc ici trouver un contre exemple pour montrer que cette affirmation est $\boxed{\text{FAUSSE}}$.

On considère $U_n = -1 - \frac{1}{n}$ $\quad V_n = (-1)^n$ $\quad W_n = 1 + \frac{1}{n}$

on a bien : $U_n \leq V_n \leq W_n$ pour tout n

et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 1$

et pourtant la suite (V_n) ne converge pas (car elle prend alternativement les valeurs -1 et 1).

AFFIRMATION 4

(U_n) est croissante donc on a $\boxed{U_0} \leq U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq \boxed{U_n}$ → $U_0 \leq U_n$

(W_n) est décroissante donc on a $\boxed{W_n} \leq W_{n-1} \leq \dots \leq W_1 \leq \boxed{W_0}$ → $W_n \geq W_0$

or on sait que, pour tout n, on a $U_n \leq V_n \leq W_n$

on en déduit $(U_0 \leq) U_n \leq V_n \leq W_n (\leq W_0)$

soit $U_0 \leq V_n \leq W_0$ → $\boxed{\text{VRAIE}}$