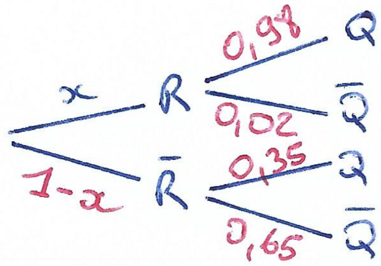
Exercice 1

1) L'énoncé nous donne $P(Q) = \boxed{0,917}$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = \boxed{0,65}$

2) a) on a l'arbre suivant :



b) on utilise la formule des probabilités totales sachant que l'on connait $P(Q) = 0,917$.

On a : $P(Q) = P(Q \cap R) + P(Q \cap \bar{R})$

soit $0,917 = x \times 0,98 + (1-x) \times 0,35$

soit $0,917 = 0,98x + 0,35 - 0,35x$

On obtient : $0,63x = 0,567 \rightarrow x = \dfrac{0,567}{0,63} = \boxed{0,9}$

3) on cherche $P_Q(R) = \dfrac{P(Q \cap R)}{P(Q)} = \dfrac{0,9 \times 0,98}{0,917} \approx \boxed{0,962}$

4) on peut interpréter l'énoncé de la façon suivante :

"on cherche le plus grand entier n à partir duquel $P(X \geq n) \geq 0,65$".

Avec la NUMWORKS, on obtient directement $P(X \geq 11) \approx 0,797$

$P(X \geq 12) \approx 0,650$

$P(X \geq 13) \approx 0,471$

↳ loi binomiale avec $n = 20$ et $p = 0,615$

Donc la note cherchée correspond à la note $\boxed{12}$.

⚠⚠ avec d'autres calculatrices, il faut passer par $p(X \leq \ldots)$.

↳ on cherche $p(X \geq n) \geq 0,65$

soit $1 - p(X < n) \geq 0,65$

soit $p(X < n) \leq 0,35$

soit $p(X \leq n-1) \leq 0,35$

et on trouve alors bien $n - 1 = 11$ soit $\boxed{n = 12}$

5) Pour chaque loi binomiale suivie par les variables N_i,

on a $E(N_i) = n \times p = 20 \times 0,615 = \boxed{12,3}$

et $V(N_i) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0,615 \times (1 - 0,615)$

$= \boxed{4,7355}$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(N_1 + N_2 + \dots + N_{10}) = E(N_1) + E(N_2) + \dots + E(N_{10})$$

$$\text{soit } E(S) = 10 \times E(N_i) = 10 \times 12{,}3 = \boxed{123}$$

et les variables N_i étant indépendantes, on a :

$$V(S) = V(N_1 + N_2 + \dots + N_3) = V(N_1) + V(N_2) + \dots + V(N_{10})$$

$$\text{soit } V(S) = 10 \times V(N_i) = 10 \times 4{,}7355 = \boxed{47{,}355}$$

6 a) cette variable M va correspondre à la note moyenne sur l'ensemble des 10 candidats.

b) on utilise les propriétés de calculs connues :

$$E(M) = E\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{10} \times E(S) = \frac{1}{10} \times 123 = \boxed{12{,}3}$$

$$\text{et } V(M) = V\left(\frac{S}{10}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times V(S) = \frac{1}{100} \times 47{,}355 = \boxed{0{,}47355}$$

c) on veut ici montrer que $p(10{,}3 < M < 14{,}3) \geq 0{,}8$.

↳ on remarque que $10{,}3$ correspond à $E(M) - 2$

et que $14{,}3$ correspond à $E(M) + 2$.

Donc on veut montrer $p(|M - E(M)| < 2) \geq 0{,}8$

or, avec l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev, on sait que :

$$p(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2}$$

et on a $p(|M - E(M) \geq 2) = 1 - p(|M - E(M)| < 2)$

On obtient donc :

$$1 - p(|M - E(M)| < 2) \leq \frac{0{,}47355}{4}$$

$$\text{soit } p(|M - E(M)| < 2) \geq 1 - \frac{0{,}47355}{4}$$

$\approx 0{,}882$

et on obtient bien $p(|M - E(M)| < 2) \geq 0{,}8$

soit $p(10{,}3 < M < 14{,}3) \geq 0{,}8$.