Exercice 3

1 ⓐ on a $U_1 = U_0 - \ln\left(\frac{U_0}{4}\right) = 8 - \ln\left(\frac{8}{4}\right) = 8 - \ln(2) \approx \boxed{7{,}31}$

et on a $U_2 = U_1 - \ln\left(\frac{U_1}{4}\right) = \underline{8-\ln(2)} - \ln\left(\frac{\underline{8-\ln(2)}}{4}\right) \approx \boxed{6{,}70}$

on garde bien les valeurs exactes !

ⓑ avec mystere(10), on aura donc $k = 10$ ici.
L'instruction for i in range(10) va effectuer 10 boucles avec la variable i allant de 0 jusqu'à 9.
L'instruction S+u va effectuer une somme.
Donc mystere(10) va correspondre à la somme des termes consécutifs $U_0 + U_1 + \dots + U_9$.

ⓒ on remplace l'instruction return S par $\boxed{\text{return}(S/k)}$

2 on a $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

$\hookrightarrow f'(x) = 1 - \frac{1/4 \; u'}{x/4 \; u} = 1 - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{x-1}{x}}$

on obtient le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x		$+$	$\mid$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$1+\ln 4$	$\nearrow$	

avec $f(1) = 1 - \ln\left(\frac{1}{4}\right)$
$= 1 - (\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 4)$
$= 1 + \ln 4$

3 ⓐ <u>Initialisation</u>

on a $U_0 = 8$ et $U_1 \approx 7{,}31$

donc on a bien $1 \leq U_1 \leq U_0$

<u>Hérédité</u>

on suppose $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$

et on va appliquer la fonction f qui est croissante sur $[1;+\infty[$ et qui va donc conserver l'ordre.

on obtient donc $f(1) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$

soit $(1 \leq)\ 1 + \ln 4 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

ne pas oublier

et on a donc bien le résultat voulu.

b) La suite (U_n) est donc décroissante (car $U_{n+1} \leq U_n$) et minorée (car $U_n \geq 1$) $\rightarrow$ la suite (U_n) est convergente.

c) on résout l'équation $f(x) = x$

soit $x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x$

soit $\ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \rightarrow \frac{x}{4} = 1 \rightarrow \boxed{x = 4}$

d) on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec la fonction f qui est continue sur $]0; +\infty[$ et la suite (U_n) qui est convergente.
Donc, avec le théorème du point fixe, on sait que la limite ℓ de (U_n) va vérifier l'équation $f(\ell) = \ell$.
D'après le résultat précédent, on aura donc $\boxed{\ell = 4}$.