Bac Spé Maths 2024

Voici la correction complète

de l'épreuve 2

pour la Polynésie

Jeudi 20 Juin 2024

Correction proposée par

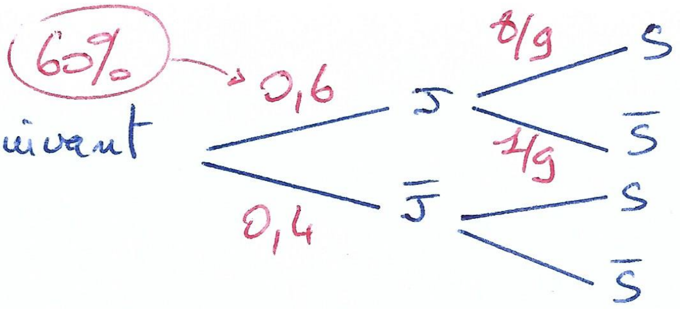
Bruno Swiners

sur

www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

1) on a l'arbre suivant




↳ on cherche $p(J \cap S) = p(J) \times p_J(S) = 0{,}6 \times \frac{8}{9} = \boxed{\frac{8}{15}}$

2) a) on connait $p(S) = \frac{2}{3}$ et on va utiliser la formule des probabilités totales : $\underbrace{p(S)}_{2/3} = \underbrace{p(J \cap S)}_{8/15} + p(\bar{J} \cap S)$

On en déduit : $p(\bar{J} \cap S) = \frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \boxed{\frac{2}{15}}$

b) on cherche $p_{\bar{J}}(S) = \frac{p(\bar{J} \cap S)}{p(\bar{J})} = \frac{\frac{2}{15}}{0{,}4} = \boxed{\frac{1}{3}}$

3) a) on a bien ici des tirages identiques et indépendants, avec deux issues possibles. La variable X va donc suivre une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = p(S) = \frac{2}{3}$

b) on cherche $p(X = 16)$ et, avec la calculatrice, on obtient $p(X = 16) \approx \boxed{0{,}046}$

c) on a $10\,000 : 380 \approx 26{,}3$ → il ne faut donc pas dépasser 26 places.

↳ on calcule $p(X \leq 26)$

toutes les calculatrices permettent de donner ce résultat.

On a $p(X \leq 26) \approx 0{,}997$

Donc on a 99,7% de chances que le budget soit suffisant et 0,3% de chances qu'il soit insuffisant.

$0{,}003 = 0{,}3\%$

## Exercice 2

Les bonnes réponses de ce QCM sont : 1 → B
2 → C
3 → B
4 → D
5 → A

Voici quelques explications même si ce n'est pas demandé.

### Question 1

La condition $f(0) = 1$ élimine la réponse C.

Ensuite, si vous connaissez votre cours par coeur, vous pouvez trouver la bonne réponse.

Sinon, vous pouvez tester les réponses et vérifier ainsi que la réponse B convient.

En effet, on a alors $f'(x) = -\frac{4}{3} \times (-3) e^{-3x} = 4e^{-3x}$

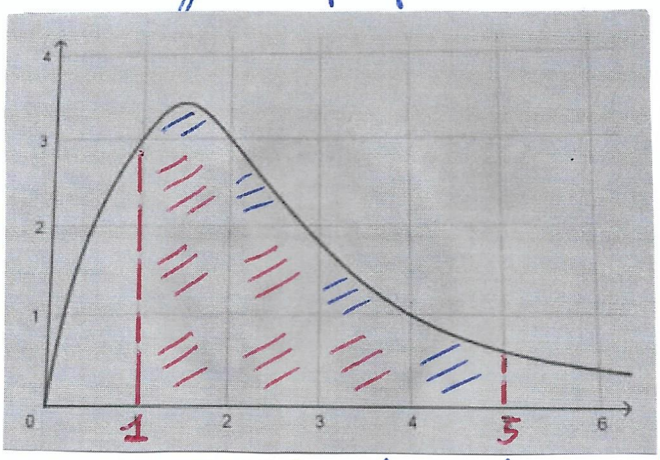
et on a : $-3f(x) + 7 = -3 \times \left(-\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}\right) + 7$

$= 4e^{-3x} - 7 + 7 = 4e^{-3x} = f'(x)$.

→ réponse $\boxed{B}$

### Question 2

L'intégrale proposée correspond à une aire sous la courbe.




Avec les unités de ce repère, on sait que chaque carreau aura une aire correspondante à 1 u.a.

On peut globalement compter 6 carreaux pleins (en rouge) et, avec le complément (en bleu), on peut conjecturer que cette aire sera environ égale à 8 u.a.

c'est à dire comprise entre 5 et 10 → réponse $\boxed{C}$

## Question 3

Une primitive de $g'$ sera la fonction $g$.

On a donc $\int_0^2 g'(x)\,dx = [g(x)]_0^2 = g(2) - g(0)$

soit $\int_0^2 g'(x)\,dx = 4\ln(8) \approx 8{,}3$ $\longrightarrow$ réponse $\boxed{B}$

## Question 4

il n'y a pas ici de notion d'ordre $\rightarrow$ on a donc ici un tirage <u>simultané</u> de 5 élèves parmi 31 élèves.

c'est donc une combinaison de 5 parmi 31, ce qui correspond à $\binom{31}{5}$ $\longrightarrow$ réponse $\boxed{D}$

## Question 5

il faut choisir 3 élèves de SES et 2 autres élèves.

↳ donc ça sera $\boxed{\times}$.

on prendra donc 3 élèves parmi les 20 élèves de SES (soit $\binom{20}{3}$) et il restera 2 élèves à choisir parmi les 11 élèves restants (soit $\binom{11}{2}$).

D'où le résultat : $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ $\longrightarrow$ réponse $\boxed{A}$

## Exercice 3

**1** ⓐ on a $U_1 = U_0 - \ln\left(\frac{U_0}{4}\right) = 8 - \ln\left(\frac{8}{4}\right) = 8 - \ln(2) \approx \boxed{7{,}31}$

et on a $U_2 = U_1 - \ln\left(\frac{U_1}{4}\right) = \underline{8 - \ln(2)} - \ln\left(\frac{\underline{8-\ln(2)}}{4}\right) \approx \boxed{6{,}70}$

on garde bien les valeurs exactes !

ⓑ avec mystere(10), on aura donc $k = 10$ ici.
L'instruction for i in range(10) va effectuer 10 boucles avec la variable i allant de 0 jusqu'à 9.
L'instruction S+u va effectuer une somme.
Donc mystere(10) va correspondre à la somme des termes consécutifs $U_0 + U_1 + \ldots + U_9$.

ⓒ on remplace l'instruction return S par $\boxed{\text{return}(S/k)}$

**2** on a $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

$\hookrightarrow f'(x) = 1 - \frac{1/4 \; u'}{x/4 \; u} = 1 - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{x-1}{x}}$

on obtient le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $1+\ln 4$ | $\nearrow$ | |

avec $f(1) = 1 - \ln\left(\frac{1}{4}\right)$
$= 1 - (\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 4)$
$= 1 + \ln 4$

**3** ⓐ <u>Initialisation</u>

On a $U_0 = 8$ et $U_1 \approx 7{,}31$
donc on a bien $1 \leq U_1 \leq U_0$

<u>Hérédité</u>

on suppose $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$
et on va appliquer la fonction $f$ qui est croissante sur $[1 ; +\infty[$ et qui va donc conserver l'ordre.

on obtient donc $f(1) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$

soit $(1 \leq)\ 1 + \ln 4 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

ne pas oublier

et on a donc bien le résultat voulu.

b) La suite $(U_n)$ est donc décroissante (car $U_{n+1} \leq U_n$) et minorée (car $U_n \geq 1$) $\rightarrow$ la suite $(U_n)$ est convergente.

c) on résout l'équation $f(x) = x$

soit $x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x$

soit $\ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \rightarrow \frac{x}{4} = 1 \rightarrow \boxed{x = 4}$

d) on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec la fonction $f$ qui est continue sur $]0;+\infty[$ et la suite $(U_n)$ qui est convergente.
Donc, avec le théorème du point fixe, on sait que la limite $\ell$ de $(U_n)$ va vérifier l'équation $f(\ell) = \ell$.
D'après le résultat précédent, on aura donc $\boxed{\ell = 4}$.

Exercice 4

1 On va vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-1)\\-2-(-1)\\4-17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-13\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-(-1)\\-3-(-1)\\7-17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-10\end{pmatrix}$

et on a $2:5=0,4$ et $-2:(-1)=2\neq 0,4$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

↳ ces points définissent donc un plan (ABC).

2 a) on a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\-13\end{pmatrix}=2\times5+(-3)\times(-1)+1\times(-13)=\boxed{0}$

et on a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-10\end{pmatrix}=2\times2+(-3)\times(-2)+1\times(-10)=\boxed{0}$

↳ on a donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ et donc on a $\boxed{\vec{n}\perp P}$

b) on utilise alors les coordonnées de $\vec{n}$ pour obtenir l'équation cartésienne de P : $\underset{a}{2}x+\underset{b}{(-3)}y+\underset{c}{1}z+d=0$

on obtient $2x-3y+z+d=0$

or on a $A\in P$ donc $2\times\underset{x_A}{(-1)}-3\times\underset{y_A}{(-1)}+\underset{z_A}{17}+d=0$

On en déduit $d=-18$ et donc $\boxed{2x-3y+z-18=0}$

3 a) on prend les coefficients liés au paramètre t

et on a donc $\vec{v}_d\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$

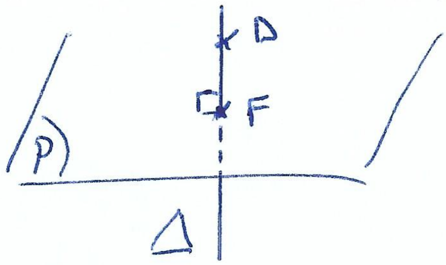
b) on remplace les coordonnées de la droite dans l'équation du plan ⟶ $2(3t+2)-3(t+5)+(4t-1)-18=0$

soit $7t-28=0$ ⟶ $t=\frac{28}{7}=\boxed{4}$

↳ on obtient les coordonnées de E :

$$E\begin{pmatrix}x=3\times4+2\\y=4+5\\z=4\times4+1\end{pmatrix}\text{ soit } E\begin{pmatrix}14\\9\\17\end{pmatrix}$$

**4** Croquis




L'énoncé nous donne toutes les indications nécessaires.

La distance entre le point D et le plan P correspond à la distance entre D et son projeté orthogonal F sur P.

On calcule donc : $DF = \sqrt{(6-2)^2+(-1-5)^2+(3-1)^2}$

soit $DF = \sqrt{56} = \boxed{2\sqrt{14}}$

**5** Sachant que la distance FD est la distance la plus courte possible entre le point D et le plan P, le nouveau drone pourra arriver à temps si la distance parcourue en 40 s à $18{,}6\,m.s^{-1}$ est supérieure ou égale à $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

On a $v = \dfrac{d}{t} \rightarrow d = v \times t = 18{,}6 \times 40 = \boxed{744\,m}$

et on a $2\sqrt{14} \approx 7{,}48$ centaines de mètres

$\approx \boxed{748 \text{ mètres}}$

On a $748 > 744$ et donc, dans tous les cas, le nouveau drone ne pourra pas arriver à temps.