Exercice 3

1 a) on va montrer que $\vec{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs (non colinéaires) du plan (CAD).

↳ on calcule $\vec{CA}\begin{pmatrix}5-0\\5-0\\0-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\-\frac{5}{2}-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$

on a $\vec{n_1}\cdot\vec{CA}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}=1\times5+(-1)\times5+0\times(-10)=\boxed{0}$

et $\vec{n_1}\cdot\vec{CD}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}=1\times0+(-1)\times0+0\times\left(-\frac{25}{2}\right)=\boxed{0}$

↳ on a bien $\vec{n_1}\perp\vec{CA}$ et $\vec{n_1}\cdot\vec{CD}$ → $\vec{n_1}$ est normal à (CAD).

b) on utilise les coordonnées de $\vec{n_1}$ pour remplacer les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne de (CAD).

↳ on obtient : $1\times x+(-1)\times y+0\times z+d=0$

soit $x-y+d=0$

or on a $C\in(CAD)$ donc on a : $\underset{x_C}{0}-\underset{y_C}{0}+d=0\rightarrow\boxed{d=0}$

et on obtient donc pour (CAD) : $\boxed{x-y=0}$

2 a) on écrit les coordonnées de $\mathcal{D}$ dans le plan (CAD)

↳ on obtient : $\frac{5}{2}t-\left(5-\frac{5}{2}t\right)=0$

soit $5t-5=0\rightarrow\boxed{t=1}$

<u>Donc</u> les coordonnées du point H seront $\begin{cases}x=\frac{5}{2}\times1\\y=5-\frac{5}{2}\times1\\z=0\end{cases}\rightarrow\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$

b) il faut donc vérifier que $H\in(CAD)$

et que $\vec{HB}\perp(CAD)$ soit $\vec{HB}$ colinéaire à $\vec{n_1}$

↳ pour $H\in(CAD)$, on calcule $\underset{x_H}{\frac{5}{2}}-\underset{y_H}{\frac{5}{2}}=0\rightarrow\boxed{OK}$

↳ pour $\vec{HB}$ colinéaire à $\vec{n_1}$

on a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 0-5/2 \\ 5-5/2 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{5}{2}\times\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{5}{2}\vec{n}_1$

donc $\overrightarrow{HB}$ est bien colinéaire à $\vec{n}_1$ et $\overrightarrow{HB} \perp (CAD) \rightarrow \boxed{OK}$

$\boxed{3}$ ⓐ on sait que l'angle droit sera en H
donc il suffit de calculer $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}$.

on a $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} 5-5/2 \\ 5-5/2 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = \frac{5}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}\times\frac{5}{2} + 0\times 0 = \boxed{0}$

donc on a $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{HB}$ et ABH est bien rectangle en H.

ⓑ on aura donc $Aire_{ABH} = \frac{HA\times HB}{2}$

avec $HA = \|\overrightarrow{HA}\| = \sqrt{(5/2)^2+(5/2)^2+0^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

et $HB = \|\overrightarrow{HB}\| = \sqrt{(-5/2)^2+(5/2)+0^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

↳ on aura donc $Aire_{ABH} = \dfrac{\frac{\sqrt{50}}{2}\times\frac{\sqrt{50}}{2}}{2} = \frac{50}{8} = \boxed{\frac{25}{4}} = \boxed{6{,}25}$

$\boxed{4}$ ⓐ il faut montrer que $\overrightarrow{OC}$ est normal à (ABH).

↳ on a $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-5 \\ 5-5 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

↳ on calcule $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\times(-5) + 0\times 0 + 10\times 0 = \boxed{0}$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{HA} = 0\times 5/2 + 0\times 5/2 + 10\times 0 = \boxed{0}$

et donc $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{HA}$ → $\overrightarrow{OC}$ est normal à (ABH)

→ (CO) est bien la hauteur souhaitée.

ⓑ on prend ABH comme base et on aura (CO)
comme base.

↳ on aura $V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times Aire_{ABH} \times OC$

avec $OC = \|\vec{OC}\| = \sqrt{0^2+0^2+10^2} = \boxed{10}$

et donc $V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 = \frac{250}{12} = \boxed{\frac{125}{6}}$

$\boxed{5}$ la distance cherchée correspond à la hauteur du tétraèdre ABCH issue du point H

et cela correspond à prendre ABC comme base.

On aura : $Aire_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2}$ car le triangle est rectangle en B

on a $\vec{AB}\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow AB = \sqrt{(-5)^2+0^2+0^2} = \boxed{5}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix} \rightarrow BC = \sqrt{0^2+(-5)^2+10^2} = \sqrt{125} = \boxed{5\sqrt{5}}$

et donc $Aire_{ABC} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \boxed{\frac{25\sqrt{5}}{2}}$

et on reprend le volume de ABCH avec la base ABC et la hauteur correspondante.

on a $\underset{\frac{125}{6}}{V_{ABCH}} = \frac{1}{3} \times \underset{\frac{25\sqrt{5}}{2}}{Aire_{ABC}} \times h$

↳ on obtient : $\frac{125}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{5}}{2} \times h$

soit $h = \frac{125}{25\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \boxed{\sqrt{5}}$

c'est la distance du point H au plan (ABC).