Exercice 1

AFFIRMATION 1 : on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et, en utilisant le théorème des croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$

soit $\lim\limits_{x \to \boxed{+\infty}} f(x) = \boxed{0}$ → asymptote horizontale d'équation $y = 0$
c'est l'axe des abscisses

→ $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 2 : on calcule $f'(x) = \underbrace{5 \times e^{-x}}_{u' \times v} + \underbrace{5x \times (-e^{-x})}_{u \times v'}$

↳ on a donc $f'(x) + f(x) = 5e^{-x} - \cancel{5xe^{-x}} + \cancel{5xe^{-x}} = 5e^{-x}$

↳ f est bien une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) → $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 3 → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

En fait, la suite (V_n) peut même ne pas être convergente !

On va proposer un contre exemple :

avec $U_n = -1 - \frac{1}{n}$ $\quad V_n = (-1)^n$ $\quad W_n = 1 + \frac{1}{n}$

On a bien $U_n \leq V_n \leq W_n$ pour tout n

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 1$ $\boxed{\text{mais}}$ (V_n) ne converge pas !

AFFIRMATION 4 → $\boxed{\text{VRAIE}}$

(U_n) est croissante donc on a $\boxed{U_0} \leq U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq \boxed{U_n}$ $\quad U_0 \leq U_n$

(W_n) est décroissante donc on a $\boxed{W_n} \leq W_{n-1} \leq \dots \leq W_1 \leq \boxed{W_0}$

$W_n \leq W_0$

or on sait que $\boxed{U_n \leq V_n \leq W_n}$

et on aura $(U_0) \leq U_n \leq V_n \leq W_n \ (\leq W_0)$

et donc $\boxed{U_0 \leq V_n \leq W_0}$