Exercice 4

Partie A

1 a) on a $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

et donc, par somme, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \boxed{-\infty}$

et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

b) on a $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \boxed{\frac{2x+1}{2x}}$

c) sur $]0;+\infty[$, on a $2x+1 > 0$ et $2x > 0$.

donc positif

↳ on a donc $f'(x) = \frac{2x+1}{2x} > 0$ sur $]0;+\infty[$

et donc f est $\boxed{\text{strictement croissante}}$ sur $]0;+\infty[$

d) on calcule $f''(x) = \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2} = \frac{\cancel{4x} - \cancel{4x} - 2}{(2x)^2} = \frac{-2}{(2x)^2}$

↳ il est évident que $f''(x) < 0$ sur $]0;+\infty[$

et donc la fonction f est $\boxed{\text{concave}}$ sur $]0;+\infty[$

2 a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ avec $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

or le nombre 0 appartient bien à $]-\infty;+\infty[$.

et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet bien une solution unique sur $]0;+\infty[$.

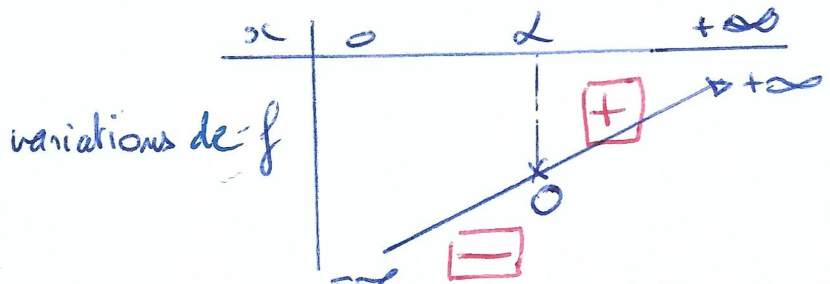
De plus, on a $f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2} \underbrace{\ln 1}_{=0} = -1$

et $f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0{,}35$

et on a bien $0 \in [f(1); f(2)]$

et on aura donc bien $\boxed{\alpha \in [1;2]}$

b) on va visualiser à nouveau les variations de f



On a donc $f(x) \leq 0$ sur $]0;\alpha]$ et $f(x) \geq 0$ sur $[\alpha;+\infty[$.

c) On sait que α vérifie $f(\alpha)=0$

et on obtient $\alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0$

soit $\frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2-\alpha \longrightarrow \boxed{\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)}$

Partie B

1) On a $g'(x) = -\frac{7}{8}\times 2x + 1 - \frac{1}{4}\Big(\underbrace{2x\ln x}_{u'\times v} + \underbrace{x^2\times\frac{1}{x}}_{u\times v'}\Big)$

soit $g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}(2x\ln x + x)$

$= -\frac{7}{4}x - \frac{1}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x = -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x$

et on a $x f\left(\frac{1}{x}\right) = x\times\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ avec $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln 1 - \ln x$
$= -\ln x$.

soit $x f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$= 1 - 2x - \frac{1}{2}x\ln x = g'(x)$ d'où le résultat.

2) a) Si on a $x \in \left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$ alors on a $0 < x < \frac{1}{\alpha}$

soit $\frac{1}{x} > \alpha$

et donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ d'après la partie A. 2) b).

b) On a $g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$

et donc sur $]0;1]$, le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (car x est forcément positif).

On en déduit :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
signe de g'		$+$	0	$-$	
variations de g		↗		↘	

Partie C

1 a) on calcule $g(x) - y = \cancel{-\frac{7}{8}x^2} + \cancel{x} - \frac{1}{4}x^2\ln x - \left(\cancel{-\frac{7}{8}x^2} + \cancel{x}\right)$

$= \underbrace{-\frac{1}{4}x^2}_{\leq 0}\ \underbrace{\ln x}_{\leq 0 \text{ sur }]0;1]}$

Donc on a $g(x) - y \geq 0$ sur $]0;1]$

et on a bien $\mathcal{C}_g$ au dessus de P sur $]0;1]$.

b) on va réaliser une intégration par parties

avec $u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2 \rightarrow v(x) = \frac{x^3}{3}$

on obtient : $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \underbrace{x^2}_{v'}\times\underbrace{\ln x}_{u}\,dx = \Big[\underbrace{\ln x}_{u} \times \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v}\Big]_{1/\alpha}^{1} - \int_{1/\alpha}^{1} \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\,dx$

↳ on va noter I cette intégrale.

On obtient : $I = \underbrace{\ln 1}_{=0} \times \frac{1^3}{3} - \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \times \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3}{3} - \frac{1}{3}\displaystyle\int_{1/\alpha}^{1} x^2\,dx$

$\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln \alpha$

soit $I = \ln(\alpha) \times \frac{1}{3\alpha^3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} = \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\alpha^3}\right)$

or on sait que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$ → partie A 2) c)

↳ on obtient $I = \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{6(2-\alpha) - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$

soit $I = \displaystyle\int_{1/\alpha}^{1} x^2\ln x\,dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$

2 on a $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} (g(x) - y)\,dx = \int_{1/\alpha}^{1} \left(-\frac{1}{4}x^2\ln x\right)dx = -\frac{1}{4} \times \int_{1/\alpha}^{1} x^2\ln x\,dx$

soit $\boxed{\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}} = \boxed{\frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}}$