Bac Spé Maths 2024
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour Métropole Antilles Guyane
Mercredi 19 Juin 2024

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

AFFIRMATION 1 : on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et, en utilisant le théorème des croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$

soit $\lim\limits_{x \to \boxed{+\infty}} f(x) = \boxed{0}$ → asymptote horizontale d'équation $y = 0$
c'est l'axe des abscisses

→ $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 2 : on calcule $f'(x) = \underbrace{5 \times e^{-x}}_{u' \times v} + \underbrace{5x \times (-e^{-x})}_{u \times v'}$

↳ on a donc $f'(x) + f(x) = 5e^{-x} - \cancel{5xe^{-x}} + \cancel{5xe^{-x}} = 5e^{-x}$

↳ f est bien une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) → $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 3 → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

En fait, la suite (V_n) peut même ne pas être convergente !

On va proposer un contre exemple :

avec $U_n = -1 - \frac{1}{n}$ $\quad V_n = (-1)^n$ $\quad W_n = 1 + \frac{1}{n}$

On a bien $U_n \leq V_n \leq W_n$ pour tout n

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 1$ $\boxed{\text{mais}}$ (V_n) ne converge pas !

AFFIRMATION 4 → $\boxed{\text{VRAIE}}$

$U_0 \leq U_n$

(U_n) est croissante donc on a $\boxed{U_0} \leq U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq \boxed{U_n}$

(W_n) est décroissante donc on a $\boxed{W_n} \leq W_{n-1} \leq \dots \leq W_1 \leq \boxed{W_0}$

$W_n \leq W_0$

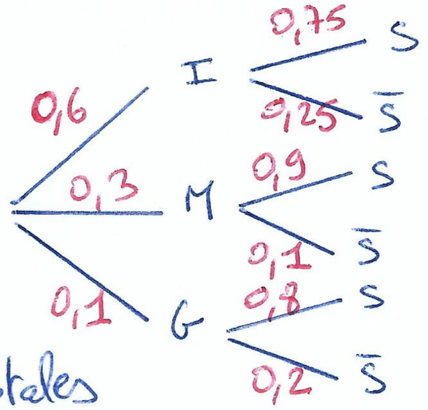
or on sait que $\boxed{U_n \leq V_n \leq W_n}$

et on aura $(U_0) \leq U_n \leq V_n \leq W_n \, (\leq W_0)$

et donc $\boxed{U_0 \leq V_n \leq W_0}$

Exercice 2

1) on a l'arbre suivant



2) on a $p(I\cap S) = p(I)\times p_I(S)$

$= 0,6\times 0,75 = \boxed{0,45}$

3) on utilise la formule des probabilités totales

$p(S) = p(I\cap S) + p(M\cap S) + p(G\cap S)$

$= 0,45 + 0,3\times 0,9 + 0,1\times 0,8 = \boxed{0,8}$

4) on cherche $p_S(I) = \dfrac{p(I\cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,45}{0,8} \approx \boxed{0,563}$

5) a) on considère que l'on a ici un tirage qui se déroule de façon identique, indépendante, avec deux issues possibles ↳ loi binomiale de paramètres

$n = \boxed{30}$ et $p = p(S) = \boxed{0,8}$

b) on cherche $p(X\geq 25) \approx \boxed{0,427}$

suivant votre calculatrice, il faut passer par $1 - p(X\leq 24)$

6) La phrase " au moins un client non satisfait " nous amène à chercher $p(\overline{S}\geq 1) \geq 0,99$ avec $p(\overline{S}) = \boxed{0,2}$

↳ on obtient $1 - p(\overline{S}=0) \geq 0,99$

soit $1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}\times \underbrace{0,2^0}_{=1}\times(1-0,2)^n \geq 0,99$

et donc on résout : $1 - (0,8)^n \geq 0,99$

soit $(0,8)^n \leq 0,01$ 1-0,99

soit $\ln(0,8)^n \leq \ln(0,01)$

soit $n\times\ln(0,8) \leq \ln(0,01)$

soit $n \geq \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6$ soit à partir de $\boxed{21}$ clients.

on inverse car $\ln(0,8)$ est négatif

$\boxed{7}$ (a) on a $E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2)$

$= 4 + 3 = \boxed{7}$ jours.

et puisque les variables sont indépendantes, on a :

$V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = \boxed{3}$

(b) on cherche $p(5 \leq T \leq 9)$ soit $p(|T - 7| \leq 2)$

avec $E(T) = 7$.

↳ on reconnait l'utilisation de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev : $p(|T-7| \geq 3) \leq \frac{V(T)}{3^2}$

c'est la petite subtilité de cette question.
on va passer par l'événement contraire de "$5 \leq T \leq 9$"
, qui sera donc "$T \leq 4$ ou $T \geq 10$"
c'est à dire $|T - 7| \geq 3$.

on a donc $p(|T-7| \geq 3) \leq \frac{3}{3^2}$

soit $p(|T-7| \geq 3) \leq \frac{1}{3}$

c'est à dire $1 - p(|T-7| \leq 2) \leq \frac{1}{3}$

soit $p(|T-7| \leq 2) \geq 1 - \frac{1}{3}$

soit $p(|T-7| \leq 2) \geq \boxed{\frac{2}{3}}$.

Exercice 3

1 a) on va montrer que $\vec{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs (non colinéaires) du plan (CAD).

↳ on calcule $\vec{CA}\begin{pmatrix}5-0\\5-0\\0-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\-\frac{5}{2}-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$

on a $\vec{n_1}\cdot\vec{CA}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}=1\times5+(-1)\times5+0\times(-10)=\boxed{0}$

et $\vec{n_1}\cdot\vec{CD}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}=1\times0+(-1)\times0+0\times(-\frac{25}{2})=\boxed{0}$

↳ on a bien $\vec{n_1}\perp\vec{CA}$ et $\vec{n_1}\cdot\vec{CD}$ → $\vec{n_1}$ est normal à (CAD).

b) on utilise les coordonnées de $\vec{n_1}$ pour remplacer les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne de (CAD).

↳ on obtient : $1\times x+(-1)\times y+0\times z+d=0$

soit $x-y+d=0$

or on a $C\in(CAD)$ donc on a : $\underset{x_C}{0}-\underset{y_C}{0}+d=0\rightarrow\boxed{d=0}$

et on obtient donc pour (CAD) : $\boxed{x-y=0}$

2 a) on écrit les coordonnées de D dans le plan (CAD)

↳ on obtient : $\frac{5}{2}t-(5-\frac{5}{2}t)=0$

soit $5t-5=0\rightarrow\boxed{t=1}$

<u>Donc</u> les coordonnées du point H seront $\begin{cases}x=\frac{5}{2}\times1\\y=5-\frac{5}{2}\times1\\z=0\end{cases}\rightarrow\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$

b) il faut donc vérifier que $H\in(CAD)$

et que $\vec{HB}\perp(CAD)$ soit $\vec{HB}$ colinéaire à $\vec{n_1}$

↳ pour $H\in(CAD)$, on calcule $\underset{x_H}{\frac{5}{2}}-\underset{y_H}{\frac{5}{2}}=0\rightarrow\boxed{OK}$

↳ pour $\vec{HB}$ colinéaire à $\vec{n_1}$

on a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 0-5/2 \\ 5-5/2 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{5}{2}\times\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{n_1}$

donc $\overrightarrow{HB}$ est bien colinéaire à $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{HB} \perp (CAD) \rightarrow \boxed{OK}$

$\boxed{3}$ ⓐ on sait que l'angle droit sera en H
donc il suffit de calculer $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}$.

on a $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} 5-5/2 \\ 5-5/2 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = \frac{5}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}\times\frac{5}{2} + 0\times 0 = \boxed{0}$

donc on a $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{HB}$ et ABH est bien rectangle en H.

ⓑ on aura donc $Aire_{ABH} = \frac{HA \times HB}{2}$

avec $HA = \|\overrightarrow{HA}\| = \sqrt{(5/2)^2 + (5/2)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

et $HB = \|\overrightarrow{HB}\| = \sqrt{(-5/2)^2 + (5/2) + 0^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

↳ on aura donc $Aire_{ABH} = \frac{\frac{\sqrt{50}}{2}\times\frac{\sqrt{50}}{2}}{2} = \frac{50}{8} = \boxed{\frac{25}{4}} = \boxed{6,25}$

$\boxed{4}$ ⓐ il faut montrer que $\overrightarrow{OC}$ est normal à (ABH).

↳ on a $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-5 \\ 5-5 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

↳ on calcule $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\times(-5) + 0\times 0 + 10\times 0 = \boxed{0}$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{HA} = 0\times 5/2 + 0\times 5/2 + 10\times 0 = \boxed{0}$

et donc $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{HA}$ → $\overrightarrow{OC}$ est normal à (ABH)

→ (CO) est bien la hauteur souhaitée.

ⓑ on prend ABH comme base et on aura (CO)
comme base.

↳ on aura $V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times Aire_{ABH} \times OC$

avec $OC = \|\vec{OC}\| = \sqrt{0^2+0^2+10^2} = \boxed{10}$

et donc $V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 = \frac{250}{12} = \boxed{\frac{125}{6}}$

5 la distance cherchée correspond à la hauteur du tétraèdre ABCH issue du point H

et cela correspond à prendre ABC comme base.

On aura : $Aire_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2}$ car le triangle est rectangle en B

on a $\vec{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to AB = \sqrt{(-5)^2+0^2+0^2} = \boxed{5}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \to BC = \sqrt{0^2+(-5)^2+10^2} = \sqrt{125} = \boxed{5\sqrt{5}}$

et donc $Aire_{ABC} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \boxed{\frac{25\sqrt{5}}{2}}$

et on reprend le volume de ABCH avec la base ABC et la hauteur correspondante.

on a $\underbrace{V_{ABCH}}_{\frac{125}{6}} = \frac{1}{3} \times \underbrace{Aire_{ABC}}_{\frac{25\sqrt{5}}{2}} \times h$

↳ on obtient : $\frac{125}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{5}}{2} \times h$

soit $h = \frac{125}{25\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \boxed{\sqrt{5}}$

c'est la distance du point H au plan (ABC).

Exercice 4

Partie A $\boxed{1}$ a) on a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

et donc, par somme, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \boxed{-\infty}$

et on a $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ et, par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

b) on a $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \boxed{\frac{2x+1}{2x}}$

c) sur $]0;+\infty[$, on a $2x+1 > 0$ et $2x > 0$.

donc positif

↳ on a donc $f'(x) = \frac{2x+1}{2x} > 0$ sur $]0;+\infty[$

et donc f est $\boxed{\text{strictement croissante}}$ sur $]0;+\infty[$

d) on calcule $f''(x) = \frac{2\times 2x - (2x+1)\times 2}{(2x)^2} = \frac{\cancel{4x} - \cancel{4x} - 2}{(2x)^2} = \frac{-2}{(2x)^2}$

↳ il est évident que $f''(x) < 0$ sur $]0;+\infty[$

et donc la fonction f est $\boxed{\text{concave}}$ sur $]0;+\infty[$

$\boxed{2}$ a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

or le nombre 0 appartient bien à $]-\infty;+\infty[$.

et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet bien une solution unique sur $]0;+\infty[$.

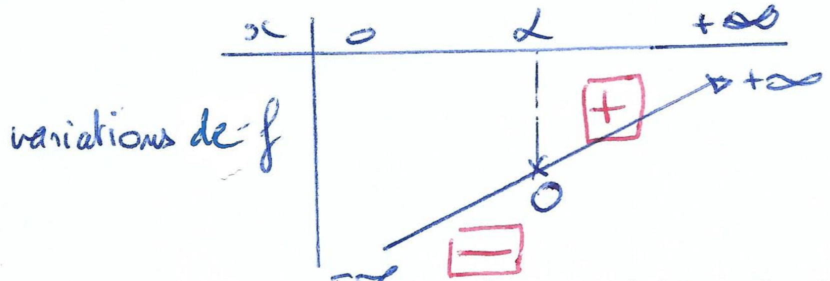
De plus, on a $f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{=0} = -1$

et $f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0,35$

et on a bien $0 \in [f(1);f(2)]$

et on aura donc bien $\boxed{\alpha \in [1;2]}$

b) on va visualiser à nouveau les variations de f



on a donc $f(x) \leq 0$ sur $]0;\alpha]$ et $f(x) \geq 0$ sur $[\alpha;+\infty[$.

c) on sait que α vérifie $f(\alpha) = 0$

et on obtient $\alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0$

soit $\frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha \longrightarrow \boxed{\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)}$

Partie B

1) on a $g'(x) = -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \frac{1}{4}\left(\underbrace{2x \ln x}_{u' \times v} + \underbrace{x^2 \times \frac{1}{x}}_{u \times v'}\right)$

soit $g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}(2x\ln x + x)$

$= -\frac{7}{4}x - \frac{1}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x = -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x$

et on a $x f\left(\frac{1}{x}\right) = x \times \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ avec $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln 1 - \ln x$
$= -\ln x$.

soit $x f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$= 1 - 2x - \frac{1}{2}x\ln x = g'(x)$ d'où le résultat.

2) a) si on a $x \in \left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$ alors on a $0 < x < \frac{1}{\alpha}$

soit $\frac{1}{x} > \alpha$

et donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ d'après la partie A. 2) b).

b) on a $g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$

et donc sur $]0;1]$, le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (car x est forcément positif).

On en déduit :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
signe de g'		$+$	0	$-$	
variations de g		$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C

$\boxed{1}$ a) on calcule $g(x) - y = -\cancel{\frac{7}{8}x^2} + \cancel{x} - \frac{1}{4}x^2\ln x - (-\cancel{\frac{7}{8}x^2} + \cancel{x})$

$$= \underbrace{-\frac{1}{4}x^2}_{\leq 0}\underbrace{\ln x}_{\leq 0 \text{ sur }]0;1]}$$

Donc on a $g(x) - y \geq 0$ sur $]0;1]$

et on a bien $\mathcal{C}_g$ au dessus de P sur $]0;1]$.

b) on va réaliser une intégration par parties

avec $u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2 \rightarrow v(x) = \frac{x^3}{3}$

on obtient : $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \underbrace{x^2}_{v'}\times\underbrace{\ln x}_{u}\, dx = \Big[\underbrace{\ln x}_{u} \times \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v}\Big]_{1/\alpha}^{1} - \int_{1/\alpha}^{1} \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\, dx$

↳ on va noter I cette intégrale.

On obtient : $I = \underbrace{\ln 1}_{=0} \times \frac{1^3}{3} - \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \times \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3}{3} - \frac{1}{3}\displaystyle\int_{1/\alpha}^{1} x^2\, dx$

$\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln \alpha$

soit $I = \ln(\alpha) \times \frac{1}{3\alpha^3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} = \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\alpha^3}\right)$

or on sait que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$ → partie A 2) c)

↳ on obtient $I = \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{6(2-\alpha) - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$

soit $I = \displaystyle\int_{1/\alpha}^{1} x^2 \ln x\, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$

$\boxed{2}$ on a $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} (g(x) - y)\, dx = \int_{1/\alpha}^{1} \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln x\right) dx = -\frac{1}{4} \times \int_{1/\alpha}^{1} x^2 \ln x\, dx$

soit $\boxed{\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}} = \boxed{\frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}}$