Exercice 4

Partie A

① on remplace, à chaque fois, x, y et z par les coordonnées de chacun des points.

point A → on a $2\times 1 + 2\times 0 - 3\times 1 + 1 = 0$ → $\boxed{OK}$

point B → on a $2\times 2 + 2\times(-1) - 3\times 1 + 1 = 0$ → $\boxed{OK}$

point C → on a $2\times(-4) + 2\times(-6) - 3\times 5 + 1 = -34 \neq 0$

Donc on a $A \in (P)$ et $B \in (P)$ mais on a $C \notin (P)$.

② on doit vérifier que $C' \in (P)$ et que le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ est orthogonal au plan (P).

or le point C' appartient bien au plan (P) car on a

$$2\times 0 + 2\times(-2) - 3\times(-1) + 1 = 0$$

et on vérifie que $\overrightarrow{CC'}$ est bien orthogonal à deux vecteurs (non colinéaires) du plan (P).

On calcule $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{C'A} = \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ -2-(-6) \\ -1-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-(-2) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c'est un vecteur de P

soit $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{C'A} = 4\times 1 + 4\times 2 + (-6)\times 2 = \boxed{0}$

et on calcule $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{C'B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-(-2) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c'est un autre vecteur de P

soit $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{C'B} = 4\times 2 + 4\times 1 + (-6)\times 2 = \boxed{0}$

Donc on a bien $\overrightarrow{CC'} \perp \overrightarrow{C'A}$ et $\overrightarrow{CC'} \perp \overrightarrow{C'B}$ soit $\underline{\overrightarrow{CC'} \perp (P)}$.

③ on obtient directement cette représentation une fois que l'on a calculé les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ → $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et on obtient pour (AB) : $\begin{cases} x = 1 + 1\times k \\ y = 0 + (-1)\times k \\ z = 1 + 0\times k \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -k \\ z = 1 \end{cases}$

point A

vecteur $\overrightarrow{AB}$

avec $k \in \mathbb{R}$

$\boxed{4}$ $H \in (AB)$ → il existe une valeur de k telle que $\begin{cases} x_H = 1+k \\ y_H = -k \\ z_H = 1 \end{cases}$

↳ on calcule $\vec{AB} \cdot \vec{CH}$ et on veut un résultat égal à 0.

On a $\vec{AB} \cdot \vec{CH} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+k-(-4) \\ -k-(-6) \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k+5 \\ -k+6 \\ -4 \end{pmatrix}$

↳ on veut donc $1 \times (k+5) + (-1) \times (-k+6) + 0 \times (-4) = 0$

soit $k+5+k-6 = 0$ → $2k-1=0$ → $k = \frac{1}{2}$

et on obtient le point H $\begin{cases} x_H = 1+\frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}} \\ y_H = \boxed{-\frac{1}{2}} \\ z_H = \boxed{1} \end{cases}$

Partie B

① on a $\|\vec{HC}\| = HC = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{153}{2}}$

$\boxed{2}$ D'après la question 4 de la partie A, on sait que (HC) est la hauteur issue du point C dans le triangle ABC, avec AB qui représentera la base.

↳ on a donc $S = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{AB \times CH}{2}$

on connait $\vec{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

avec $AB = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

on obtient alors $S = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{153}}{2}}$

Partie C

$\boxed{1}$ on utilise la formule

$$\vec{HC'} \cdot \vec{HC} = \|\vec{HC'}\| \times \|\vec{HC}\| \times \cos(\widehat{CHC'})$$

↳ on calcule $\vec{HC'}\begin{pmatrix} 0 - 3/2 \\ -2-(-1/2) \\ -1-1 \end{pmatrix}$ soit $\vec{HC'}\begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{pmatrix}$

on en déduit $\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11/2 \\ -11/2 \\ 4 \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{11}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{11}{2}\right) + (-2)\times 4$

$= \frac{17}{2}$

et on a donc $\underbrace{\frac{17}{2}}_{\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{HC}} = \underbrace{\sqrt{\frac{17}{2}}}_{HC'} \times \underbrace{\sqrt{\frac{153}{2}}}_{HC} \times \cos(\widehat{CHC'})$

↳ $\cos(\widehat{CHC'}) = \cos(\alpha) = \left(\frac{17/2}{\sqrt{17/2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\boxed{2}$ a) on calcule $\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

↳ $\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{3}{2}\right)\times 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\times(-1) + (-2)\times 0 = \boxed{0}$

↳ on a bien $\overrightarrow{HC'} \perp \overrightarrow{AB}$, d'où le résultat.

b) $(C'H)$ est donc la hauteur issue de C' dans le triangle ABC', avec AB qui représentera la base.

↳ on a donc $S' = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AB \times C'H}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}}}{2}$

soit $S' = \boxed{\frac{\sqrt{17}}{2}}$

c) c'est une drôle de question pour finir ce sujet !

↳ on peut raisonner géométriquement ou avec du pur calcul numérique.

On a $S = \frac{\sqrt{153}}{2}$; $S' = \frac{\sqrt{17}}{2}$ et $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$

↳ $S = 3 \times S'$ soit $S' = \frac{1}{3} \times S$

soit $\boxed{S' = \cos(\alpha) \times S}$