Exercice 1

Partie A

1 avec les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$

et, donc, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\boxed{0}$

en $+\infty$, on factorise par x^2 → $f(x)=x^2\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

et, avec les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$

2 on aura $f'(x)=2x-\left(\underbrace{1\times\ln(x)}_{u'\times v}+\underbrace{x\times\frac{1}{x}}_{u\times v'}\right)$

→ $\boxed{f'(x)=2x-\ln x-1}$

3 on dérive $f'(x)$ et on a $f''(x)=2-\dfrac{1}{x}=\boxed{\dfrac{2x-1}{x}}$

4 pour les variations de f', on étudie le signe de f''.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		↘	$f'(\frac{1}{2})=\ln 2$	↗	

on résout $2x-1=0$.

$f'(\frac{1}{2})$
$=2\times\frac{1}{2}-\ln(\frac{1}{2})-1$
$=-\ln(\frac{1}{2})=\ln 2$

5 Le minimum de la fonction f' est égal à $\ln 2$, qui est un nombre positif.

Donc la fonction f' sera <u>positive</u> sur $]0;+\infty[$

Partie B

1 on a $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

et on obtient le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g		↘	1	↗	

on a $g(1)=1-\ln(1)$
$=1.$

$\boxed{2}$ on résout $f(x) = x \to x^2 - x\ln(x) = x$

$\to x^2 - x\ln(x) - x = 0$

$\to x(\underbrace{x - \ln(x)}_{} - 1) = 0$

on reconnait $g(x)$

↳ on obtient donc $x(g(x) - 1) = 0$

or, on a $x \neq 0$, donc cette équation est équivalente à $g(x) - 1 = 0$ ou $g(x) = 1$

soit $\boxed{x = 1}$

partie A question $\boxed{5}$

Partie C

$\boxed{1}$ on sait que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

↳ la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Initialisation : on a $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_1 = f(U_0) = f(\frac{1}{2}) = \ln 2 \approx 0{,}69$

Donc on a bien $\frac{1}{2} \leq U_0 \leq U_1 \leq 1$

Hérédité : on suppose $\frac{1}{2} \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$

et on applique la fonction f qui est croissante sur $]0;+\infty[$ et qui conserve alors l'ordre.

→ on obtient $f(1/2) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(1)$

soit $(\frac{1}{2} \leq)\ \ln 2 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1$

ne pas oublier

et on a bien le résultat voulu.

$\boxed{2}$ La suite (U_n) est donc croissante (car $U_n \leq U_{n+1}$) et majorée par 1 (car $U_n \leq 1$). Donc la suite (U_n) converge.

$\boxed{3}$ on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec (U_n) qui converge et la fonction f qui est continue sur $]0;+\infty[$.

En appliquant le théorème du point fixe, on sait que la limite ℓ de (U_n) vérifie $f(\ell) = \ell$, dont la seule solution sur $]0;+\infty[$ est égale à 1.

On a donc : $\boxed{\ell = 1}$

voir partie B.