Bac Spé Maths 2024
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
pour Asie Pacifique
Mardi 11 Juin 2024

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1) avec les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

et, donc, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \boxed{0}$

en $+\infty$, on factorise par x^2 $\to$ $f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

et, avec les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

2) on aura $f'(x) = 2x - (\underbrace{1 \times \ln(x)}_{u' \times v} + \underbrace{x \times \frac{1}{x}}_{u \times v'})$

$\to \boxed{f'(x) = 2x - \ln x - 1}$

3) on dérive $f'(x)$ et on a $f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{2x-1}{x}}$

4) pour les variations de f', on étudie le signe de f''.

x	0		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		$\searrow$	$f'(\frac{1}{2}) = \ln 2$	$\nearrow$	

on résout $2x - 1 = 0$.

$f'(\frac{1}{2})$
$= 2 \times \frac{1}{2} - \ln(\frac{1}{2}) - 1$
$= -\ln(\frac{1}{2}) = \ln 2$

5) Le minimum de la fonction f' est égal à $\ln 2$, qui est un nombre positif.

Donc la fonction f' sera <u>positive</u> sur $]0\,;+\infty[$

Partie B

1) on a $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

et on obtient le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g		$\searrow$	1	$\nearrow$	

on a $g(1) = 1 - \ln(1)$
$= 1$.

$\boxed{2}$ on résout $f(x) = x \rightarrow x^2 - x\ln(x) = x$

$\rightarrow x^2 - x\ln(x) - x = 0$

$\rightarrow x(\underbrace{x - \ln(x)}_{\text{on reconnait } g(x)} - 1) = 0$

↳ on obtient donc $x(g(x) - 1) = 0$

or, on a $x \neq 0$, donc cette équation est équivalente à $g(x) - 1 = 0$ ou $g(x) = 1$

soit $\boxed{x = 1}$

partie A question $\boxed{5}$

Partie C

$\boxed{1}$ on sait que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

↳ la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Initialisation : on a $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_1 = f(U_0) = f(\frac{1}{2}) = \ln 2 \approx 0{,}69$

Donc on a bien $\frac{1}{2} \leq U_0 \leq U_1 \leq 1$

Hérédité : on suppose $\frac{1}{2} \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$

et on applique la fonction f qui est croissante sur $]0;+\infty[$ et qui conserve alors l'ordre.

$\rightarrow$ on obtient $f(1/2) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(1)$

soit $(\frac{1}{2} \leq) \ln 2 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1$

ne pas oublier

et on a bien le résultat voulu.

$\boxed{2}$ La suite (U_n) est donc croissante (car $U_n \leq U_{n+1}$) et majorée par 1 (car $U_n \leq 1$). Donc la suite (U_n) converge.

$\boxed{3}$ on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec (U_n) qui converge et la fonction f qui est continue sur $]0;+\infty[$.

En appliquant le théorème du point fixe, on sait que la limite ℓ de (U_n) vérifie $f(\ell) = \ell$, dont la seule solution sur $]0;+\infty[$ est égale à 1.

On a donc : $\boxed{\ell = 1}$

voir partie B.

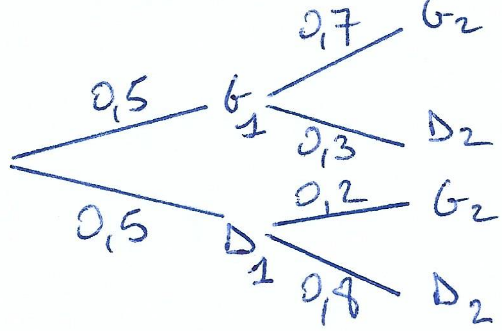
Exercice 2

1 On cherche $p_{G_1}(D_2)$, la probabilité de perdre la 2^e partie sachant qu'elle a gagner la première.

D'après l'énoncé, on a $p_{G_1}(D_2) = 1 - 0{,}7 = \boxed{0{,}3}$

$p_{G_1}(G_2)$

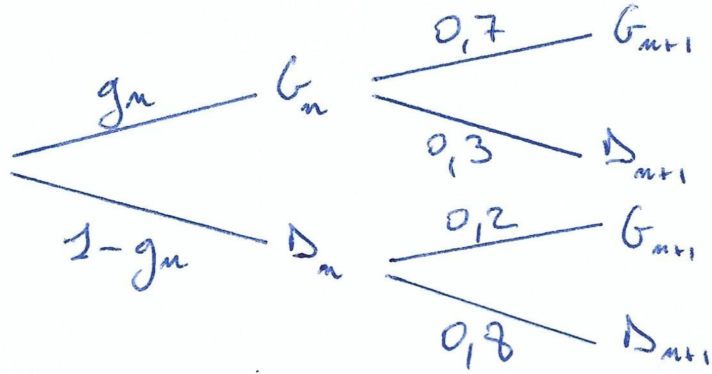
2 On a l'arbre suivant



3 On cherche $g_2 = p(G_2)$ et on utilise la formule des probabilités totales : $p(G_2) = p(G_1 \cap G_2) + p(D_1 \cap G_2)$

$\rightarrow g_2 = p(G_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}2 = \boxed{0{,}45}$

4 ⓐ Les probabilités conditionnelles sont inchangées ici par rapport à l'arbre de la question 2.



ⓑ On calcule $g_{n+1} = P(G_{n+1})$ en utilisant, à nouveau, la formule des probabilités totales.

On a : $g_{n+1} = P(G_{n+1}) = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(D_n \cap G_{n+1})$

$= g_n \times 0{,}7 + (1 - g_n) \times 0{,}2$

et on obtient $g_{n+1} = 0{,}7 g_n + 0{,}2 - 0{,}2 g_n$

soit $g_{n+1} = 0{,}5 g_n + 0{,}2$

5 a) on a $g_{n+1} = 0,5 g_n + 0,2$ et $v_n = g_n - 0,4$

↳ donc $g_n = v_n + 0,4$

↳ on part de $v_{n+1} = g_{n+1} - 0,4$

$= 0,5 g_n + 0,2 - 0,4$ on remplace g_n par $v_n + 0,4$

$= 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 = 0,5 v_n + \cancel{0,2} - \cancel{0,2}$

soit $\boxed{v_{n+1} = 0,5 v_n}$

Donc (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\boxed{0,5}$ et de premier terme $v_1 = g_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = \boxed{0,1}$

b) on en déduit, avec la formule des suites géométriques :

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$

⚠

et donc on a : $g_n = v_n + 0,4 = \boxed{0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4}$

6 on calcule $g_{n+1} - g_n = 0,1 \times 0,5^{n} + 0,4 - (0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4)$

$= 0,1 \times 0,5^{n} - 0,1 \times 0,5^{n-1}$

$= \underbrace{0,1 \times 0,5^{n-1}}_{\text{positif}} \times \underbrace{(0,5 - 1)}_{\text{négatif}} < 0$ (négatif)

↳ la suite (g_n) est <u>décroissante</u>.

7 on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ car $0 < 0,5 < 1$

donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = \boxed{0,4}$

→ à terme, la probabilité de gagner une partie sera égale à 0,4 (ou 40 %).

8 on résout $g_n - 0,4 \leq 0,001$ → $0,1 \times 0,5^{n-1} \leq 0,001$

→ $0,5^{n-1} \leq 0,01$

→ $\ln 0,5^{n-1} \leq \ln 0,01$

→ $(n-1) \ln 0,5 \leq \ln 0,01$

inversion car $\ln 0,5$ est négatif

et on obtient $n \geq \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,5} + 1 \approx 7,64$

soit, à partir de $n = 8$.

9 ligne 4 : while g > 0.4 + e

ligne 5 : g = 0,5 * g + 0,2

ligne 6 : n = n + 1

à bien rajouter ici !!

Exercice 3

AFFIRMATION 1 : on a $\dfrac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \dfrac{\cancel{n^2}\left(3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(6+\frac{1}{n^2}\right)}$ on peut simplifier par n^2.

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n^2} = 0$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}\right) = 3$

et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(6+\frac{1}{n^2}\right) = 6$

Donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

et, en appliquant le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 2 : il est évident que, sur l'intervalle $[-1;3]$, la fonction h' est croissante puis décroissante (à partir de 1,25 environ).
Et si h' est décroissante, cela signifie que la fonction h est concave sur une partie de $[-1;3]$.

$\rightarrow$ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 3

Pour les lettres, on aura toujours 3 possibilités pour la première et seulement 2 pour la seconde car elles doivent être distinctes.
Le nombre de codes sans contrainte pour les chiffres serait égal à : $10\times10\times10\times10\times3\times2 = 60\,000$
Le nombre de codes ne contenant pas de zéro serait égal à : $9\times9\times9\times9\times3\times2 = 39\,366$

il y a 10 chiffres de 0 à 9

on ne prend pas le zéro et il reste 9 chiffres de 1 à 9.

Le nombre de codes avec au moins un 0 s'obtient par la soustraction de ses deux résultats.

on obtient : $\underset{\text{nombre total sans contrainte}}{60\,000} - \underset{\text{nombre avec aucun zéro}}{39\,366} = \underset{\text{nombre avec au moins un 0}}{20\,634}$.

$\rightarrow \boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 4

il suffit de faire une vérification → inutile de résoudre cette équation différentielle (qui dépasse le programme de Terminale).

↳ on calcule $f'(x) = \underbrace{1 \times \ln x}_{u' \times v} + \underbrace{x \times \frac{1}{x}}_{u \times v'} = \ln x + 1$

et on calcule $xf'(x) - f(x) = x(\ln x + 1) - x\ln x$

$= \cancel{x\ln x} + x - \cancel{x\ln x}$

$= x$

Donc on a bien $xf'(x) - f(x) = x$ $\rightarrow \boxed{\text{VRAIE}}$

Exercice 4

Partie A

① on remplace, à chaque fois, x, y et z par les coordonnées de chacun des points.

point A → on a $2\times 1 + 2\times 0 - 3\times 1 + 1 = 0$ → $\boxed{\text{OK}}$

point B → on a $2\times 2 + 2\times(-1) - 3\times 1 + 1 = 0$ → $\boxed{\text{OK}}$

point C → on a $2\times(-4) + 2\times(-6) - 3\times 5 + 1 = -34 \neq 0$

Donc on a $A \in (P)$ et $B \in (P)$ mais on a $C \notin (P)$.

② on doit vérifier que $C' \in (P)$ et que le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ est orthogonal au plan (P).

or le point C' appartient bien au plan (P) car on a

$$2\times 0 + 2\times(-2) - 3\times(-1) + 1 = 0$$

et on vérifie que $\overrightarrow{CC'}$ est bien orthogonal à deux vecteurs (non colinéaires) du plan (P).

On calcule $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{C'A} = \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ -2-(-6) \\ -1-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-(-2) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c'est un vecteur de P

soit $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{C'A} = 4\times 1 + 4\times 2 + (-6)\times 2 = \boxed{0}$

et on calcule $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{C'B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-(-2) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c'est un autre vecteur de P

soit $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{C'B} = 4\times 2 + 4\times 1 + (-6)\times 2 = \boxed{0}$

Donc on a bien $\overrightarrow{CC'} \perp \overrightarrow{C'A}$ et $\overrightarrow{CC'} \perp \overrightarrow{C'B}$ soit $\overrightarrow{CC'} \perp (P)$.

③ on obtient directement cette représentation une fois que l'on a calculé les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ → $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et on obtient pour (AB) : $\begin{cases} x = 1 + 1\times k \\ y = 0 + (-1)\times k \\ z = 1 + 0\times k \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -k \\ z = 1 \end{cases}$

point A

vecteur $\overrightarrow{AB}$

avec $k \in \mathbb{R}$

$\boxed{4}$ $H \in (AB)$ → il existe une valeur de k telle que $\begin{cases} x_H = 1+k \\ y_H = -k \\ z_H = 1 \end{cases}$

↳ on calcule $\vec{AB} \cdot \vec{CH}$ et on veut un résultat égal à 0.

On a $\vec{AB} \cdot \vec{CH} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+k-(-4) \\ -k-(-6) \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k+5 \\ -k+6 \\ -4 \end{pmatrix}$

↳ on veut donc $1 \times (k+5) + (-1) \times (-k+6) + 0 \times (-4) = 0$

soit $k+5+k-6=0$ → $2k-1=0$ → $k = \frac{1}{2}$

et on obtient le point H $\begin{cases} x_H = 1+\frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}} \\ y_H = \boxed{-\frac{1}{2}} \\ z_H = \boxed{1} \end{cases}$

Partie B

① on a $\|\vec{HC}\| = HC = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{153}{2}}$

$\boxed{2}$ D'après la question 4 de la partie A, on sait que (HC) est la hauteur issue du point C dans le triangle ABC, avec AB qui représentera la base.

↳ on a donc $S = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AB \times CH}{2}$

on connait $\vec{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

avec $AB = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

On obtient alors $S = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{153}}{2}}$

Partie C

$\boxed{1}$ on utilise la formule

$$\vec{HC'} \cdot \vec{HC} = \|\vec{HC'}\| \times \|\vec{HC}\| \times \cos(\widehat{CHC'})$$

↳ on calcule $\vec{HC'}\begin{pmatrix} 0 - 3/2 \\ -2-(-1/2) \\ -1-1 \end{pmatrix}$ soit $\vec{HC'}\begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{pmatrix}$

on en déduit $\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11/2 \\ -11/2 \\ 4 \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{11}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{11}{2}\right) + (-2)\times 4$

$= \frac{17}{2}$

et on a donc $\underbrace{\frac{17}{2}}_{\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{HC}} = \underbrace{\sqrt{\frac{17}{2}}}_{HC'} \times \underbrace{\sqrt{\frac{153}{2}}}_{HC} \times \cos(\widehat{CHC'})$

↳ $\cos(\widehat{CHC'}) = \cos(\alpha) = \left(\frac{17/2}{\sqrt{17/2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}} \right) = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\boxed{2}$ a) on calcule $\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

↳ $\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{3}{2}\right)\times 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\times(-1) + (-2)\times 0 = \boxed{0}$

↳ on a bien $\overrightarrow{HC'} \perp \overrightarrow{AB}$, d'où le résultat.

b) $(C'H)$ est donc la hauteur issue de C' dans le triangle ABC', avec AB qui représentera la base.

↳ on a donc $S' = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AB \times C'H}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}}}{2}$

soit $S' = \boxed{\frac{\sqrt{17}}{2}}$

c) c'est une drôle de question pour finir ce sujet !

↳ on peut raisonner géométriquement ou avec du pur calcul numérique.

On a $S = \frac{\sqrt{153}}{2}$; $S' = \frac{\sqrt{17}}{2}$ et $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$

↳ $S = 3 \times S'$ soit $S' = \frac{1}{3} \times S$

soit $\boxed{S' = \cos(\alpha) \times S}$