Exercice 4

AFFIRMATION 1 → elle est FAUSSE et donc il suffit de trouver un contre exemple.

→ on considère la suite définie par $U_n = 1 + \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

on montre facilement que cette suite est décroissante et qu'elle est minorée par 0.

Pour autant, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{1}$ et non pas 0.

→ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 2 : on va noter $V_n = \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$.

On a $V_n = \dfrac{-9^n}{7^n} + \dfrac{3^n}{7^n} = -\left(\frac{9}{7}\right)^n + \left(\frac{3}{7}\right)^n$.

Et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{9}{7}\right)^n = +\infty$ (car $\frac{9}{7} > 1$)

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$ (car $0 < \frac{3}{7} < 1$).

On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \boxed{-\infty}$

Donc on a : $U_n \leq V_n$ (pour tout n)

et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$

et avec le théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{-\infty}$

→ $\boxed{\text{VRAIE}}$

⚠ le résultat aurait été faux avec $\dfrac{(-9)^n + 3^n}{7^n}$ car la suite de terme général $\left(-\frac{9}{7}\right)^n$ n'a pas de limite en l'infini !!

AFFIRMATION 3 : l'instruction "for i in range(4)" fera 4 boucles avec "i" allant de 0 à 3.

c'est le "piège"

pour $i=0$, on a $U = 1+0 = 1$
pour $i=1$, on a $U = 1+1 = 2$
pour $i=2$, on a $U = 2+2 = 4$
pour $i=3$, on a $U = 4+3 = \boxed{7}$ $\longrightarrow$ **VRAIE**

AFFIRMATION 4

prix A $\rightarrow$ $1000\,€ \times 15 = \boxed{15\,000\,€}$

prix B $\rightarrow$ c'est une somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2

$$\text{on a : somme} = (\text{premier terme}) \times \frac{1-(\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1-(\text{raison})}$$

$$\text{soit somme} = 1 \times \frac{1-2^{15}}{1-2} = \boxed{32\,767\,€} > 15\,000\,€$$

$\longrightarrow$ **FAUSSE**

AFFIRMATION 5

$$\text{on calcule } U_{n+1} - U_n = \int_1^{n+1} \ln x\,dx - \int_1^n \ln x\,dx$$

$$= \int_1^{n+1} \ln x\,dx + \int_n^1 \ln x\,dx$$

on ré-organise le calcul pour appliquer la propriété de Chasles sur les intégrales

$$= \int_n^1 \ln x\,dx + \int_1^{n+1} \ln x\,dx = \int_n^{n+1} \ln x\,dx$$

or, pour $x \geq 1$, on a $\ln x \geq 0$.

donc on a $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln x\,dx \geq 0$

soit $U_{n+1} - U_n \geq 0$ $\rightarrow$ suite croissante

$\longrightarrow$ **VRAIE**