Exercice 3

Partie A

1) L'énoncé nous donne $p(I) = 5{,}7\% = \boxed{0{,}057}$

2) a) on assimile ce prélèvement à une série d'épreuves identiques et indépendantes, avec deux issues possibles.

→ on a donc une loi binomiale avec $\boxed{n = 100}$ et $\boxed{p = p(I) = 0{,}057}$.

b) on sait que $E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}057 = \boxed{5{,}7}$.

Il y aura, en moyenne, 5,7 personnes infectées dans une population de 100 personnes prises au hasard.

c) on cherche $p(X=0) = \underbrace{\binom{100}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{100-0} = (1-0{,}057)^{100}$

$\approx \boxed{0{,}0028}$

d) on cherche $p(X \geq 2)$ et on obtient directement avec certaines calculatrices (numworks ...) $p(X \geq 2) \approx \boxed{0{,}9801}$.

Avec les autres calculatrices, il faut utiliser le calcul suivant :

$p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1)$ et on obtient aussi $\boxed{0{,}9801}$

e) il suffit de faire des tests avec sa calculatrice.

→ on a $p(X \leq 8) \approx 0{,}8829 < 0{,}9$

et $p(X \leq 9) \approx 0{,}9408 > 0{,}9$

et, plus la valeur de n augmente, plus la valeur de $p(X \leq n)$ augmente → la valeur cherchée est donc $\boxed{n = 9}$.

Donc la probabilité qu'il y ait un maximum de 9 individus infectés dans une population de 100 personnes est supérieure à 0,9 (ou 90%).

Partie B

1) on a l'arbre suivant

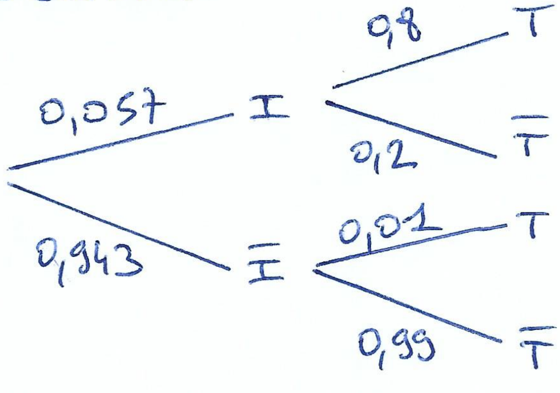
on sait que

$p(I) = 0{,}057$

et l'énoncé nous donne

$p_I(T) = 0{,}8$

$p_{\overline{I}}(\overline{T}) = 0{,}99$



$\boxed{2}$ on utilise la formule des probabilités totales

$\hookrightarrow p(T) = p(I \cap T) + p(\bar{I} \cap T)$

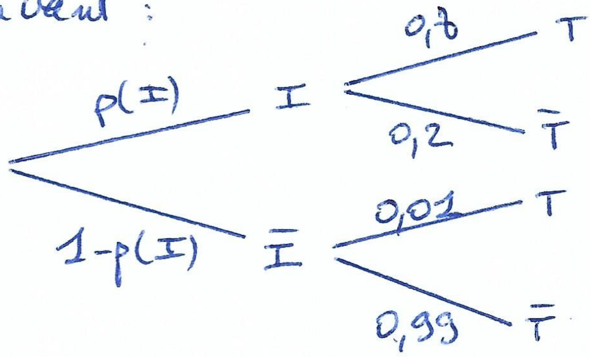
$= 0{,}057 \times 0{,}8 + 0{,}943 \times 0{,}01 = \boxed{0{,}05503}$

$\boxed{3}$ on cherche $p_T(I) = \dfrac{p(I \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}057 \times 0{,}8}{0{,}05503} \approx \boxed{0{,}8286}$

Partie C

on ne connait pas $p(I)$ dans cette population et on a l'arbre suivant :

Les autres probabilités sont inchangées ici !



on sait que $p(T) = 0{,}2944$

et on a toujours, avec la formule des probabilités totales,

$$p(T) = p(I \cap T) + p(\bar{I} \cap T).$$

On en déduit :

$$\underbrace{p(I) \times 0{,}8}_{p(I \cap T)} + \underbrace{(1 - p(I)) \times 0{,}01}_{p(\bar{I} \cap T)} = 0{,}2944$$

soit $0{,}8\,p(I) + 0{,}01 - 0{,}01\,p(I) = 0{,}2944$

soit $0{,}79\,p(I) = 0{,}2844$

soit $p(I) = \dfrac{0{,}2844}{0{,}79} = \boxed{0{,}36}$ ou $\boxed{36\%}$