Exercice 2

$\boxed{1}$ On va montrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On a $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-(-1) \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

et on a $-3 : 1 = -3$ et $4 : 0 =$ "impossible"

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

Donc A, B et C sont des points non alignés $\rightarrow$ ils forment un plan.

$\boxed{2}$ ⓐ ces points sont coplanaires si on peut trouver deux nombres x et y tels que $\vec{AD} = x\,\vec{AB} + y\,\vec{AC}$

($\vec{AD}$ serait une combinaison linéaire de $\vec{AB}$ et de $\vec{AC}$)

On a $\vec{AD}\begin{pmatrix} 4-3 \\ 3-(-1) \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Donc on cherche x et y tels que $\begin{cases} 1 = x\times 1 + y\times(-3) \\ 4 = x\times 0 + y\times 4 \\ -3 = x\times(-1) + y\times 1 \end{cases}$

↳ on résout le système $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 4y = 4 \\ -x + y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 3\times 1 = 1 \\ y = 4/4 = \boxed{1} \\ -x + 1 = -3 \end{cases}$

on remplace y par 1.

et on obtient $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

cette dernière égalité sert à vérifier la cohérence des solutions.

Donc on a $\vec{AD} = 4.\vec{AB} + 1\,\vec{AC} = 4\,\vec{AB} + \vec{AC}$

↳ les points A, B, C et D sont coplanaires

③ on veut montrer que les côtés [AB] et [CD] sont parallèles.

X suffit de montrer que $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

On a $\vec{CD}\begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-3 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\times\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\,\vec{AB}$

Donc $\vec{CD}$ et $\vec{AB}$ sont bien colinéaires $\rightarrow$ (CD) // (AB).

↳ ABDC est bien un trapèze.

3 a) On montre que $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs (non colinéaires) du plan (ABC).

On a : $\vec{n} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\times 1 + 1\times 0 + 2\times(-1) = \boxed{0}$

et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\times(-3) + 1\times 4 + 2\times 1 = \boxed{0}$

↳ On a donc $\vec{n} \perp \vec{AB}$ et $\vec{n} \perp \vec{AC}$ → $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b) Les coordonnées de $\vec{n}$ seront donc les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

On obtient : $2x + 1y + 2z + d = 0$

or on a $A \in (ABC)$ et donc $2\times \underbrace{4}_{x_A} + 1\times(\underbrace{-1}_{y_A}) + 2\times \underbrace{0}_{z_A} + d = 0$

soit $7 + d = 0$ ⇝ $\boxed{d = -7}$

On obtient donc pour (ABC) : $\boxed{2x + y + 2z - 7 = 0}$

c) La droite Δ sera donc dirigé par le vecteur $\vec{n}$.

On a donc pour Δ $\begin{cases} x = \underbrace{2}_{} + 2\times k \\ y = 1 + 1\times k \\ z = \underbrace{4}_{\text{point } S} + \underbrace{2}_{\text{vecteur } \vec{n}}\times k \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 4 + 2k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$

d) On écrit les coordonnées de la droite Δ dans le plan (ABC).

↳ On obtient $2\times(2 + 2k) + 1 + k + 2\times(4 + 2k) - 7 = 0$

soit $6 + 9k = 0$ soit $k = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$

On en déduit pour le point I $\begin{cases} x = 2 + 2\times(-\frac{2}{3}) = \boxed{\frac{2}{3}} \\ y = 1 + (-\frac{2}{3}) = \boxed{\frac{1}{3}} \\ z = 4 + 2\times(-\frac{2}{3}) = \boxed{\frac{8}{3}} \end{cases}$

et on a $SI = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$ (cm).

4 a) on doit vérifier que les points H, C et D sont alignés.

On a $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}0-3\\3-3\\2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-0\\3-3\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

et on constate que $\overrightarrow{CD}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{HC}$

Donc $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont colinéaires → on a $H\in(CD)$

De plus, on calcule $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}3-4\\3-(-1)\\-1-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

↳ on obtient $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}=-1\times4+4\times0+(-1)\times(-4)=\boxed{0}$

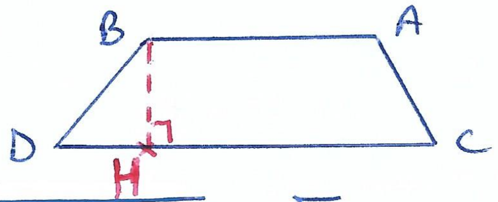
conclusion : on a $H\in(CD)$ et on a $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CD}$

Donc H est bien le projeté orthogonal de B sur (CD).

b) on calcule $HB=\sqrt{(4-3)^2+(-1-3)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{18}=\boxed{3\sqrt{2}}$ (cm)

5) Dans ce trapèze, on aura $b=AB$, $B=CD$ et $h=HB$

↳ voici le croquis



on $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(1)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

et $CD=\|\overrightarrow{CD}\|=\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}=\sqrt{32}$

On en déduit : $\mathcal{A}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{32}}{2}\times3\sqrt{2}=\boxed{15}$ cm²

5 on en déduit le volume de la pyramide SABDC

en prenant le trapèze ABDC comme base

et avec SI qui sera la hauteur associée.

↳ On a : $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times \text{Aire}_{ABDC}\times SI=\frac{1}{3}\times15\times2=\boxed{10}$ cm³