Exercice 1

Partie A

[1] on obtient le tableau suivant (graphiquement).

x	0		1,5		$+\infty$
fonction f		$\nearrow$	2,4	$\searrow$	0

[2] Le point A semble être un point d'inflexion pour la courbe $\mathcal{C}$.

[3] La fonction f est croissante sur $[0;1,5]$ et décroissante sur $[1,5;+\infty[$. Donc la fonction f' est positive sur $[0;1,5]$ et négative sur $[1,5;+\infty[$ $\rightarrow$ $\boxed{f' \text{ correspond à la courbe } \mathcal{C}_2}$.

La fonction f est concave sur $[0;2,5]$ et convexe sur $[2,5;+\infty[$. Donc la fonction f'' est négative sur $[0;2,5]$ et positive sur $[2,5;+\infty[$ $\rightarrow$ $\boxed{f'' \text{ correspond à la courbe } \mathcal{C}_1}$

[4] La courbe $\mathcal{C}_3$ est croissante sur $[0;0,5]$ et décroissante sur $[0,5;+\infty[$. Donc la dérivée de cette primitive de f (qui sera donc égale à la fonction f !!) doit être positive sur $[0;0,5]$ et négative sur $[0,5;+\infty[$ $\rightarrow$ ce qui n'est pas le cas de f si on regarde la courbe $\mathcal{C}$ (c'est même "l'inverse") $\rightarrow$ $\mathcal{C}_3$ ne peut pas représenter une primitive de f.

Partie B

[1] a) on utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$

$\hookrightarrow$ on obtient $f'(x) = \underbrace{4 \times e^{-x+1}}_{u' \times v} + \underbrace{(4x-2) \times (-e^{-x+1})}_{u \times v'}$

$\hookrightarrow$ $f'(x) = e^{-x+1} \times (4-(4x-2)) = \boxed{e^{-x+1} \times (-4x+6)}$

b) on obtient alors le tableau suivant

x	0		1,5		$+\infty$
e^{-x+1}		+	|	+	
fonction affine $\rightarrow$ $-4x+6$		+	0	−	
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1,5)$	$\searrow$	

on résout $-4x+6=0$

$\hookrightarrow x = \frac{-6}{-4} = 1,5$

et on calcule $f(0) = -2e^{1} \approx -5,4$

$f(1,5) = 4e^{-0,5} \approx 2,4$

ⓒ on calcule f'', la fonction dérivée de f'.

↳ on obtient $f''(x) = \underbrace{-4 \times e^{-x+1}}_{u' \times v} + \underbrace{(-4x+6) \times (-e^{-x+1})}_{u \times v'}$

↳ $f''(x) = e^{-x+1} \times (-4-(-4x+6)) = e^{-x+1} \times (4x-10)$

et on en déduit le tableau suivant :

x	0		$2,5$		$+\infty$
e^{-x+1}		$+$	|	$+$	
$4x-10$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
fonction f		CONCAVE	|	CONVEXE	

on résout $4x-10=0$

↳ $x = \frac{10}{4} = 2,5$.

↳ point d'inflexion d'abscisse 2,5.

[2] ⓐ on va dériver F et on identifiera terme à terme avec f afin de déterminer a et b.

↳ on a : $F'(x) = \underbrace{a \times e^{-x+1}}_{u' \times v} + \underbrace{(ax+b) \times (-e^{-x+1})}_{u \times v'}$

soit $F'(x) = e^{-x+1} \times (a-(ax+b)) = (-ax+a-b) \times e^{-x+1}$

et, en identifiant avec f, on obtient : $\begin{cases} -a = 4 \\ a-b = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}$

ⓑ on aura $I = F(8) - F(3/2)$

↳ $I = (-4\times 8-2)e^{-8+1} - (-4\times\frac{3}{2}-2)e^{-\frac{3}{2}+1}$

↳ $\boxed{I = -34e^{-7} + 8e^{-0,5}} \approx \boxed{4,82}$

[3] ⓐ on calcule $f(3/2) = f(1,5) = 4e^{-0,5} \approx \boxed{2,43 \text{ m}}$

ⓑ La surface du mur correspond exactement à l'intégrale I calculée précédemment.

↳ on veut couvrir "75% de I" soit $\frac{75}{100} \times (-34e^{-7} + 8e^{-0,5})$

et on obtient environ $3,62 \text{ m}^2$ c'est à dire 5 bombes aérosol

(car $5 \times 0,8 \text{ m}^2 = 4 \text{ m}^2$ et $4 \times 0,8 \text{ m}^2 = 3,2 \text{ m}^2$).