Bac Spé Maths 2024
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour Asie Pacifique
Lundi 10 Juin 2024

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1. on obtient le tableau suivant (graphiquement).

x	0		$1{,}5$		$+\infty$
fonction f		↗	$2{,}4$	↘	0

2. Le point A semble être un point d'inflexion pour la courbe $\mathcal{C}$.

3. La fonction f est croissante sur $[0;1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5;+\infty[$. Donc la fonction f' est positive sur $[0;1{,}5]$ et négative sur $[1{,}5;+\infty[$ → $\boxed{f' \text{ correspond à la courbe } \mathcal{C}_2}$.
La fonction f est concave sur $[0;2{,}5]$ et convexe sur $[2{,}5;+\infty[$. Donc la fonction f'' est négative sur $[0;2{,}5]$ et positive sur $[2{,}5;+\infty[$ → $\boxed{f'' \text{ correspond à la courbe } \mathcal{C}_1}$

4. La courbe $\mathcal{C}_3$ est croissante sur $[0;0{,}5]$ et décroissante sur $[0{,}5;+\infty[$. Donc la dérivée de cette primitive de f (qui sera donc égale à la fonction f !!) doit être positive sur $[0;0{,}5]$ et négative sur $[0{,}5;+\infty[$ → ce qui n'est pas le cas de f si on regarde la courbe $\mathcal{C}$ (c'est même "l'inverse") → $\mathcal{C}_3$ ne peut pas représenter une primitive de f.

Partie B

1. a) on utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$
↳ on obtient $f'(x) = \underbrace{4}_{u'} \times \underbrace{e^{-x+1}}_{v} + \underbrace{(4x-2)}_{u} \times \underbrace{(-e^{-x+1})}_{v'}$
↳ $f'(x) = e^{-x+1} \times (4-(4x-2)) = \boxed{e^{-x+1} \times (-4x+6)}$

b) on obtient alors le tableau suivant

x	0		$1{,}5$		$+\infty$
e^{-x+1}		$+$	|	$+$	
fonction affine → $-4x+6$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(1{,}5)$	↘	

on résout $-4x+6=0$
↳ $x = \frac{-6}{-4} = 1{,}5$

et on calcule $f(0) = -2e^{1} \approx -5,4$

$f(1,5) = 4e^{-0,5} \approx 2,4$

ⓒ on calcule f'', la fonction dérivée de f'.

↳ on obtient $f''(x) = \underbrace{-4 \times e^{-x+1}}_{u' \times v} + \underbrace{(-4x+6)}_{u} \times \underbrace{(-e^{-x+1})}_{v'}$

↳ $f''(x) = e^{-x+1} \times (-4 - (-4x+6)) = e^{-x+1} \times (4x-10)$

et on en déduit le tableau suivant :

x	0		$2,5$		$+\infty$
e^{-x+1}		$+$		$+$	
$4x-10$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
fonction f		CONCAVE		CONVEXE	

on résout $4x-10=0$

↳ $x = \frac{10}{4} = 2,5$.

point d'inflexion d'abscisse 2,5.

$\boxed{2}$ ⓐ on va dériver F et on identifiera terme à terme avec f afin de déterminer a et b.

↳ on a : $F'(x) = \underbrace{a}_{u'} \times \underbrace{e^{-x+1}}_{v} + \underbrace{(ax+b)}_{u} \times \underbrace{(-e^{-x+1})}_{v'}$

soit $F'(x) = e^{-x+1} \times (a - (ax+b)) = (-ax+a-b) \times e^{-x+1}$

et, en identifiant avec f, on obtient : $\begin{cases} -a = 4 \\ a-b = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}$

ⓑ on aura $I = F(8) - F(3/2)$

↳ $I = (-4\times 8 - 2)e^{-8+1} - (-4 \times \frac{3}{2} - 2)e^{-\frac{3}{2}+1}$

↳ $\boxed{I = -34e^{-7} + 8e^{-0,5}} \approx \boxed{4,82}$

$\boxed{3}$ ⓐ on calcule $f(3/2) = f(1,5) = 4e^{-0,5} \approx \boxed{2,43\text{ m}}$

ⓑ La surface du mur correspond exactement à l'intégrale I calculée précédemment.

↳ on veut couvrir "75% de I" soit $\frac{75}{100} \times (-34e^{-7} + 8e^{-0,5})$

et on obtient environ $3,62\text{ m}^2$ c'est à dire 5 bombes aérosol

(car $5 \times 0,8\text{ m}^2 = 4\text{ m}^2$ et $4 \times 0,8\text{ m}^2 = 3,2\text{ m}^2$).

Exercice 2

$\boxed{1}$ on va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-3\\-1-(-1)\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-3\\3-(-1)\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$

et on a $-3:1=-3$ et $4:0=$ "impossible"

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Donc A, B et C sont des points non alignés → ils forment un plan.

$\boxed{2}$ ⓐ ces points sont coplanaires si on peut trouver deux nombres x et y tels que $\overrightarrow{AD}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$

($\overrightarrow{AD}$ serait une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$)

On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4-3\\3-(-1)\\-2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$

Donc on cherche x et y tels que $\begin{cases}1=x\times1+y\times(-3)\\4=x\times0+y\times4\\-3=x\times(-1)+y\times1\end{cases}$

↳ on résout le système $\begin{cases}x-3y=1\\4y=4\\-x+y=-3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x-3\times1=1\\y=4/4=\boxed{1}\\-x+1=-3\end{cases}$ on remplace y par 1.

et on obtient $\begin{cases}x=4\\y=1\\x=4\end{cases}$ ← cette dernière égalité sert à vérifier la cohérence des solutions.

Donc on a $\overrightarrow{AD}=4.\overrightarrow{AB}+1\,\overrightarrow{AC}=4\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

↳ les points A, B, C et D sont coplanaires

③ on veut montrer que les côtés [AB] et [CD] sont parallèles.

Il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-0\\3-3\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}=4\times\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=4\,\overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont bien colinéaires → (CD) // (AB).

↳ ABDC est bien un trapèze.

$\boxed{3}$ ⓐ on montre que $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs (non colinéaires) du plan (ABC).

On a : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\times 1 + 1\times 0 + 2\times(-1) = \boxed{0}$

et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\times(-3) + 1\times 4 + 2\times 1 = \boxed{0}$

↳ On a donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ → $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

ⓑ Les coordonnées de $\vec{n}$ seront donc les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

On obtient : $2x + 1y + 2z + d = 0$

or on a $A \in (ABC)$ et donc $2 \times \underbrace{4}_{x_A} + 1\times(\underbrace{-1}_{y_A}) + 2\times \underbrace{0}_{z_A} + d = 0$

soit $7 + d = 0$ ⤳ $\boxed{d = -7}$

On obtient donc pour (ABC) : $\boxed{2x + y + 2z - 7 = 0}$

ⓒ la droite Δ sera donc dirigé par le vecteur $\vec{n}$.

On a donc pour Δ $\begin{cases} x = \boxed{2} + \boxed{2} \times k \\ y = \boxed{1} + \boxed{1} \times k \\ z = \underbrace{\boxed{4}}_{\text{points } S} + \underbrace{\boxed{2}}_{\text{vecteur } \vec{n}} \times k \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 4 + 2k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$

ⓓ on écrit les coordonnées de la droite Δ dans le plan (ABC).

↳ on obtient $2\times(2 + 2k) + 1 + k + 2\times(4 + 2k) - 7 = 0$

soit $6 + 9k = 0$ soit $k = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$

On en déduit pour le point I $\begin{cases} x = 2 + 2\times\left(-\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{2}{3}} \\ y = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}} \\ z = 4 + 2\times\left(-\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{8}{3}} \end{cases}$

et on a $SI = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$ (cm).

4 a) on doit vérifier que les points H, C et D sont alignés.

On a $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}0-3\\3-3\\2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-0\\3-3\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

et on constate que $\overrightarrow{CD} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{HC}$

Donc $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont colinéaires ↳ on a $H \in (CD)$

De plus, on calcule $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}3-4\\3-(-1)\\-1-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

↳ on obtient $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD} = -1\times4+4\times0+(-1)\times(-4) = \boxed{0}$

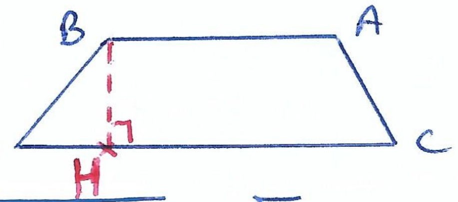
conclusion : on a $H\in(CD)$ et on a $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CD}$

Donc H est bien le projeté orthogonal de B sur (CD).

b) on calcule $HB = \sqrt{(4-3)^2+(-1-3)^2+(0-(-1))^2} = \sqrt{18} = \boxed{3\sqrt{2}}$ (cm)

c) Dans ce trapèze, on aura $b = AB$, $B = CD$ et $h = HB$

↳ voici le croquis



on $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(1)^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

et $CD = \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{4^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{32}$

On en déduit : $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{32}}{2}\times 3\sqrt{2} = \boxed{15}$ cm²

5 On en déduit le volume de la pyramide SABDC en prenant le trapèze ABDC comme base et avec SI qui sera la hauteur associée.

↳ On a : $V = \frac{1}{3}\times \text{Aire}_{ABDC}\times SI = \frac{1}{3}\times 15\times 2 = \boxed{10}$ cm³

Exercice 3

Partie A 1 L'énoncé nous donne $p(I) = 5{,}7\% = \boxed{0{,}057}$

2 ⓐ on assimile ce prélèvement à une série d'épreuves identiques et indépendantes, avec deux issues possibles.
↪ on a donc une loi binomiale avec $\boxed{n = 100}$ et $\boxed{p = p(I) = 0{,}057}$.

ⓑ on sait que $E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}057 = \boxed{5{,}7}$.
Il y aura, en moyenne, 5,7 personnes infectées dans une population de 100 personnes prises au hasard.

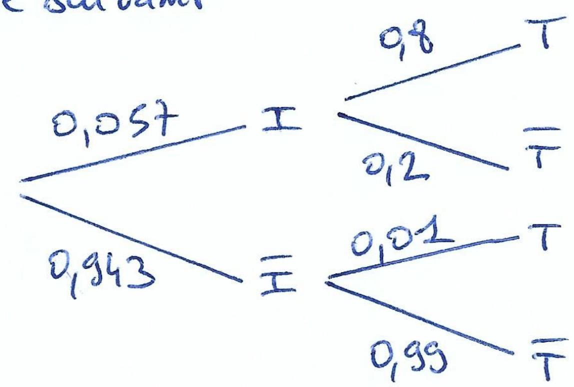
ⓒ on cherche $p(X=0) = \underbrace{\binom{100}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{100-0} = (1-0{,}057)^{100}$
$\approx \boxed{0{,}0028}$

ⓓ on cherche $p(X \geq 2)$ et on obtient directement avec certaines calculatrices (numworks ...) $p(X \geq 2) \approx \boxed{0{,}9801}$.
Avec les autres calculatrices, il faut utiliser le calcul suivant :
$p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1)$ et on obtient aussi $\boxed{0{,}9801}$

ⓔ il suffit de faire des tests avec sa calculatrice.
↪ on a $p(X \leq 8) \approx 0{,}8829 < 0{,}9$
et $p(X \leq 9) \approx 0{,}9408 > 0{,}9$
et, plus la valeur de n augmente, plus la valeur de $p(X \leq n)$ augmente → la valeur cherchée est donc $\boxed{n = 9}$.
Donc la probabilité qu'il y ait un maximum de 9 individus infectés dans une population de 100 personnes est supérieure à 0,9 (ou 90%).

Partie B 1 on a l'arbre suivant

on sait que
$p(I) = 0{,}057$
et l'énoncé nous donne
$p_I(T) = 0{,}8$
$p_{\overline{I}}(\overline{T}) = 0{,}99$



$\boxed{2}$ on utilise la formule des probabilités totales

$$\hookrightarrow p(T) = p(I \cap T) + p(\overline{I} \cap T)$$

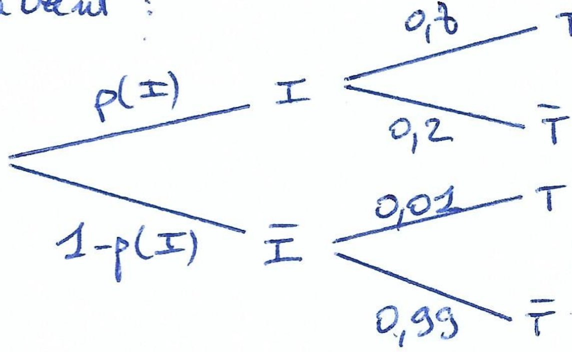
$$= 0{,}057 \times 0{,}8 + 0{,}943 \times 0{,}01 = \boxed{0{,}05503}$$

$\boxed{3}$ on cherche $p_T(I) = \dfrac{p(I \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}057 \times 0{,}8}{0{,}05503} \approx \boxed{0{,}8286}$

Partie C

on ne connait pas $p(I)$ dans cette population et on a l'arbre suivant :

Les autres probabilités sont inchangées ici !



on sait que $p(T) = 0{,}2944$

et on a toujours, avec la formule des probabilités totales,

$$p(T) = p(I \cap T) + p(\overline{I} \cap T).$$

On en déduit :

$$\underbrace{p(I) \times 0{,}8}_{p(I \cap T)} + \underbrace{(1 - p(I)) \times 0{,}01}_{p(\overline{I} \cap T)} = 0{,}2944$$

soit $0{,}8\,p(I) + 0{,}01 - 0{,}01\,p(I) = 0{,}2944$

soit $0{,}79\,p(I) = 0{,}2844$

soit $p(I) = \dfrac{0{,}2844}{0{,}79} = \boxed{0{,}36}$ ou $\boxed{36\%}$

Exercice 4

AFFIRMATION 1 → elle est FAUSSE et donc il suffit de trouver un contre exemple.

→ on considère la suite définie par $U_n = 1 + \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

on montre facilement que cette suite est décroissante et qu'elle est minorée par 0.

Pour autant, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{1}$ et non pas 0.

→ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 2 : on va noter $V_n = \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$.

On a $V_n = \dfrac{-9^n}{7^n} + \dfrac{3^n}{7^n} = -\left(\frac{9}{7}\right)^n + \left(\frac{3}{7}\right)^n$.

Et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{9}{7}\right)^n = +\infty$ (car $\frac{9}{7} > 1$)

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$ (car $0 < \frac{3}{7} < 1$).

On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \boxed{-\infty}$

Donc on a : $U_n \leq V_n$ (pour tout n)

et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$

et avec le théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{-\infty}$

→ $\boxed{\text{VRAIE}}$

⚠ le résultat aurait été faux avec $\dfrac{(-9)^n + 3^n}{7^n}$ car la suite de terme général $\left(-\frac{9}{7}\right)^n$ n'a pas de limite en l'infini !!

AFFIRMATION 3 : l'instruction "for i in range (4)" fera 4 boucles avec "i" allant de 0 à 3.

c'est le "piège"

pour $i=0$, on a $U = 1+0 = 1$
pour $i=1$, on a $U = 1+1 = 2$
pour $i=2$, on a $U = 2+2 = 4$
pour $i=3$, on a $U = 4+3 = \boxed{7}$ → $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 4

prix A → $1000 € \times 15 = \boxed{15\,000 €}$
prix B → c'est une somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2

$$\text{on a : somme} = (\text{premier terme}) \times \frac{1-(\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1-(\text{raison})}$$

$$\text{soit somme} = 1 \times \frac{1-2^{15}}{1-2} = \boxed{32\,767 €} > 15\,000 €$$

→ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 5

$$\text{on calcule } U_{n+1} - U_n = \int_1^{n+1} \ln x\,dx - \int_1^{n} \ln x\,dx$$

$$= \int_1^{n+1} \ln x\,dx + \int_n^{1} \ln x\,dx$$

on ré-organise le calcul pour appliquer la propriété de Chasles sur les intégrales

$$= \int_n^{1} \ln x\,dx + \int_1^{n+1} \ln x\,dx = \int_n^{n+1} \ln x\,dx$$

or, pour $x \geq 1$, on a $\ln x \geq 0$.

donc on a $\int_n^{n+1} \ln x\,dx \geq 0$

soit $U_{n+1} - U_n \geq 0$ → suite croissante

→ $\boxed{\text{VRAIE}}$