Exercice 2

1 a) on cherche ici la limite en 1^- c'est à dire avec $x<1$ car la fonction est définie sur $]-\infty;1[$.

↳ on a $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ — e^x tend vers e^1 ; $x-1$ tend vers 0^- (négatif)

↳ on a une limite du type $\dfrac{e}{0^-}$ donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \boxed{-\infty}$

b) on a $\lim\limits_{\boxed{x \to 1}} f(x) = \boxed{-\infty}$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ admet une <u>asymptote verticale</u> d'équation $x=1$.

2 on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x-1 = -\infty$

↳ on a une limite du type $\dfrac{0}{-\infty}$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{0}$

3 a) on applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

et on obtient $f'(x) = \dfrac{\overbrace{e^x}^{u'} \times \overbrace{(x-1)}^{v} - \overbrace{e^x}^{u} \times \overbrace{1}^{v'}}{\underbrace{(x-1)^2}_{v^2}} = \dfrac{e^x \times (x-2)}{(x-1)^2}$ en factorisant par e^x

b) sur $]-\infty;1[$, on a $x<1$ et donc $x-2<-1<0$ (négatif)

et on aura, pour tout x, $e^x > 0$ (positif)

et $(x-1)^2 > 0$ (positif)

Donc on aura $f'(x) < 0$ pour tout x de $]-\infty;1[$

et donc f sera <u>décroissante</u> sur $]-\infty;1[$.

on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		1
$f(x)$	0	↘	$-\infty$

4 ⓐ on cherche les racines de $x^2-4x+5 \rightarrow \Delta=(-4)^2-4\times1\times5$
$=-4<0$

Donc ce trinôme n'a pas de racine → il aura donc un signe unique sur $]-\infty;1[$ (qui sera positif).

Mais attention

sur $]-\infty;1[$, on a $x<1$ et donc $x-1<0$

et, en prenant le cube, on a $(x-1)^3<0$ (négatif)

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		1
x^2-4x+5		$+$	
e^x		$+$	
$(x-1)^3$		$-$	0
$f''(x)$		$-$	0
fonction f		CONCAVE	

ⓑ on aura $T: y=f'(0)\times(x-0)+f(0)$

$\hookrightarrow \boxed{y=-2x-1}$ car $f'(0)=-2$ et $f(0)=-1$

ⓒ La fonction est concave sur $]-\infty;1[$.

Donc sa courbe $\mathcal{C}$ se situera en dessous de ses tangentes.

On a donc, sur $]-\infty;1[$, $f(x)\leq y$

soit $\dfrac{e^x}{x-1}\leq -2x-1$

soit $\boxed{e^x\geq(-2x-1)(x-1)}$

inversion car on a "multiplié" par $x-1$ qui est négatif

5 ⓐ on sait que f est continue et décroissante sur $]-\infty;1[$.

on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{0}$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\boxed{-\infty}$

or le nombre -2 appartient bien à $]-\infty;0[$.

Donc, en appliquant le corollaire du TVI, on montre que l'équation $f(x)=-2$ a une solution unique sur $]-\infty;1[$.

ⓑ on obtient avec la calculatrice $\boxed{0{,}31<\alpha<0{,}32}$