Bac Spé Maths 2024
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
pour Centres Etrangers
Jeudi 06 Juin 2024

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

1) on effectue ici des tirages AVEC remise
→ il y a 8 possibilités pour le premier jeton
et il y a 8 possibilités pour le deuxième jeton
et il y a 8 possibilités pour le troisième jeton

soit un total de $8 \times 8 \times 8 = \boxed{512}$ tirages possibles.

2) a) on a toujours 8 possibilités pour le premier jeton
MAIS il nous reste 7 possibilités pour le deuxième jeton
PUIS il nous reste 6 possibilités pour le troisième jeton.

on ne doit tirer à nouveau le premier jeton pioché.

soit un total ici de $8 \times 7 \times 6 = \boxed{336}$ tirages sans répétition.

⚠ on aurait pu aussi reconnaître un arrangement de 3 jetons parmi 8 → $A_3^8 = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8!}{5!} = 336$.

b) L'évènement contraire de "tirages avec au moins une répétition" est "tirages sans répétition".
Donc le nombre de tirages avec au moins une répétition est égale à :

$$\underbrace{512}_{\text{nombre total de tirages}} - \underbrace{336}_{\text{nombre de tirages sans répétition}} = \boxed{176}$$

3) cette variable aléatoire X_1 ne concerne que le premier jeton pioché
→ on a une chance sur huit d'obtenir chacun des numéros.
On obtient donc la loi de probabilité :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

↳ on aurait pu marquer $\frac{1}{8}$ ou 0,125 ou 12,5%.

$\boxed{4}$ on applique la formule $E(X_1) = \sum_i p_i x_i$

$= p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_8 x_8$

et on obtient $E(X_1) = \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 2 + \dots + \frac{1}{8} \times 8 = \boxed{4{,}5}$

$\boxed{5}$ Les variables X_1, X_2 et X_3 auront la même loi de probabilité et la même espérance.
On applique alors le principe de la linéarité de l'espérance.

On a : $E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3)$

$= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$

$= 4{,}5 + 4{,}5 + 4{,}5 = \boxed{13{,}5}$

$\boxed{6}$ on a $P(S=24) = P(\text{obtenir 3 fois le numéro } 8)$

$= 1$ chance sur 512

il n'y a qu'un seul tirage qui donnera 8, et 8, et 8.

c'est le nombre total de tirages

soit $p(S=24) = \boxed{\frac{1}{512}} \approx 0{,}002$.

$\boxed{7}$ ⓐ Le plus simple parait d'effectuer un dénombrement "à la main" en prenant tous les cas possibles.

Lo on obtient : 888 — on obtient 24

887, 878, 788, 886, 868, 688 — on obtient 23 ou 22

877, 787, 778 — on obtient 22

et tous les autres tirages vont donner une somme égale à 21 ou moins que 21.

Donc il y a bien exactement 10 tirages qui permettent de gagner un lot.

ⓑ La probabilité de gagner un lot est donc égale à :

$\frac{10}{512} \approx 0{,}02$ soit environ 2% de chances.

Exercice 2

1) a) on cherche ici la limite en 1^- c'est à dire avec $x<1$ car la fonction est définie sur $]-\infty;1[$.

↳ on a $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ $e^x \to$ tend vers e^1 ; $x-1 \to$ tend vers 0^- (négatif)

↳ on a une limite du type $\dfrac{e}{0^-}$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \boxed{-\infty}$

b) on a $\lim\limits_{\boxed{x\to 1}} f(x) = \boxed{-\infty}$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

2) on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1 = -\infty$

↳ on a une limite du type $\dfrac{0}{-\infty}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{0}$

3) a) on applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ en factorisant par e^x

et on obtient $f'(x) = \dfrac{\underbrace{e^x}_{u'} \times \underbrace{(x-1)}_{v} - \underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{1}_{v'}}{\underbrace{(x-1)^2}_{v^2}} = \dfrac{e^x \times (x-2)}{(x-1)^2}$

b) sur $]-\infty;1[$, on a $x<1$ et donc $x-2<-1<0$ (négatif)

et on aura, pour tout x, $e^x>0$ (positif)

et $(x-1)^2>0$ (positif)

Donc on aura $f'(x)<0$ pour tout x de $]-\infty;1[$

et donc f sera décroissante sur $]-\infty;1[$.

on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		1
$f(x)$	0	↘	$-\infty$

4 ⓐ on cherche les racines de x^2-4x+5 → $\Delta=(-4)^2-4\times1\times5$
$= -4 < 0$

Donc ce trinôme n'a pas de racine → il aura donc un signe unique sur $]-\infty;1[$ (qui sera positif).

Mais attention

sur $]-\infty;1[$, on a $x<1$ et donc $x-1<0$

et, en prenant le cube, on a $(x-1)^3<0$ (négatif)

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		1
x^2-4x+5		$+$	
e^x		$+$	
$(x-1)^3$		$-$	0
$f''(x)$		$-$	0
fonction f		CONCAVE	

ⓑ on aura $T : y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$

↪ $\boxed{y=-2x-1}$ car $f'(0)=-2$ et $f(0)=-1$

ⓒ La fonction est concave sur $]-\infty;1[$.

Donc sa courbe $\mathcal{C}$ se situera en dessous de ses tangentes.

On a donc, sur $]-\infty;1[$, $f(x)\leq y$

soit $\dfrac{e^x}{x-1}\leq -2x-1$

soit $\boxed{e^x \geq (-2x-1)(x-1)}$

inversion car on a "multiplié" par $x-1$ qui est négatif

5 ⓐ on sait que f est continue et décroissante sur $]-\infty;1[$.

on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{0}$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \boxed{-\infty}$

or le nombre -2 appartient bien à $]-\infty;0[$.

Donc, en appliquant le corollaire du TVI, on montre que l'équation $f(x)=-2$ a une solution unique sur $]-\infty;1[$.

ⓑ on obtient avec la calculatrice $\boxed{0{,}31<\alpha<0{,}32}$

Exercice 3

[1] on a $I\begin{pmatrix}0,5\\0\\0\end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix}1\\1\\0,5\end{pmatrix}$

[2] on a aussi $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

↳ on en déduit $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0,5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-0,5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}0,5-1\\0-0\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,5\\0\\-1\end{pmatrix}$

On calcule alors $\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{FH}=\begin{pmatrix}1\\1\\-0,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=1\times(-1)+1\times1+(-0,5)\times0=\boxed{0}$

et $\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{FI}=\begin{pmatrix}1\\1\\-0,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0,5\\0\\-1\end{pmatrix}=1\times(-0,5)+1\times0+(-0,5)\times(-1)=\boxed{0}$

Donc on a $\overrightarrow{EJ}\perp\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{EJ}\perp\overrightarrow{FI}$ donc $\boxed{\overrightarrow{EJ} \text{ est normal à } (FHI)}$.

[3] on utilise alors les coordonnées de ce vecteur normal $\overrightarrow{EJ}$ dans l'équation cartésienne du plan (FHI).

On obtient : $\underset{a}{1}x+\underset{b}{1}y\underset{c}{-0,5}z+d=0$

or le point H (par exemple) appartient à ce plan (FHI).

↳ on obtient $1\times\underset{x_H}{0}+1\times\underset{y_H}{1}-0,5\times\underset{z_H}{1}+d=0$ soit $0,5+d=0$

↳ $d=-0,5$

on en déduit l'équation de (FHI) : $1x+1y-0,5z-0,5=0$

et en multipliant le tout par (-2) : $\boxed{-2x-2y+z+1=0}$

[4] on obtient directement pour (EJ)

$$\begin{cases}x=0+1\times k\\y=0+1\times k\\z=1+(-0,5)\times k\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}x=k\\y=k\\z=1-0,5k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{R})$$

point E vecteur directeur $\overrightarrow{EJ}$

[5] ⓐ En reprenant l'énoncé, on voit que ce point K correspond au point d'intersection entre la droite (EJ) et le plan (FHI).

on a $(EJ)\perp(FHI)$.

↳ on écrit les coordonnées de (EJ) dans l'équation cartésienne du plan (FHI).

On obtient : $-2k-2k+1-0{,}5k+1=0$

soit $-4{,}5k+2=0 \rightarrow k=\frac{-2}{-4{,}5}=\frac{4}{9}$

et on obtient les coordonnées du point K

$\hookrightarrow K\begin{pmatrix} x=4/9 \\ y=4/9 \\ z=1-0{,}5\times\frac{4}{9}=\frac{7}{9}\end{pmatrix}$ soit $K\begin{pmatrix}4/9\\4/9\\7/9\end{pmatrix}$

b) On a $V_{EFHI}=\dfrac{\text{Aire Base}\times\text{Hauteur associée}}{3}$

et on va prendre ici le triangle EFH comme base avec la hauteur qui rejoint I au milieu de [EF] (elle mesure 1cm !).

On a : $\text{Aire}_{EFH}=\dfrac{EF\times EH}{2}=\dfrac{1\times1}{2}=\dfrac{1}{2}$

et on obtient $V_{EFHI}=\dfrac{1/2\times1}{3}=\boxed{\frac{1}{6}}\ cm^3$.

c) on va exprimer maintenant ce volume en prenant le triangle FHI comme base et la hauteur associée sera [EK].

on calcule alors $EK=\sqrt{(4/9-0)^2+(4/9-0)^2+(7/9-1)^2}$

$\hookrightarrow EK=\sqrt{\frac{36}{81}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

$\hookrightarrow$ On a donc :

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{6}$ $V_{EFHI}=\dfrac{\text{Aire}_{FHI}\times EK}{3}$

et donc $\dfrac{1}{6}=\dfrac{\text{Aire}_{FHI}\times\frac{2}{3}}{3}\rightarrow\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{9}\times\text{Aire}_{FHI}$

$\rightarrow \text{Aire}_{FHI}=\frac{1}{6}:\frac{2}{9}=\boxed{\frac{3}{4}\ cm^2}$

Exercice 4

Partie A

$\boxed{1}$ On a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ pour $x \in [0;+\infty[$

Donc f est bien croissante sur $[0;+\infty[$

$\boxed{2}$ On a $f(x) - x = \sqrt{x+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x+1} - x)\times(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x}$

(on a multiplié par l'expression conjuguée afin de faire apparaître l'égalité remarquable avec $a^2 - b^2$)

↳ on obtient $f(x) - x = \dfrac{(\sqrt{x+1})^2 - (x)^2}{\sqrt{x+1} + x} = \dfrac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$

$\boxed{3}$ on a $f(x) = x$ si et seulement si $f(x) - x = 0$.

or un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

↳ on résout donc $-x^2 + x + 1 = 0$

↳ on obtient $\Delta = 1 - 4\times(-1)\times 1 = 5 > 0$ et il y a donc deux racines $\cancel{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\notin [0;+\infty[$

cette racine appartient bien à l'intervalle $[0;+\infty[$

On a donc bien, sur $[0;+\infty[$, la solution $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie B

$\boxed{1}$ Initialisation on a $U_0 = 5$

et $U_1 = f(U_0) = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}$ $(\approx 2,45)$

↳ on aura donc bien $1 \leq U_1 \leq U_0$.

Hérédité on suppose que $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$

et on applique la fonction f qui est croissante sur $[1;+\infty[$ et qui conservera donc l'ordre de ces inégalités.

on obtient : $f(1) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$

soit $(1 \leq)\ \sqrt{2} \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$.

et on a bien le résultat voulu.

$\boxed{2}$ La suite (U_n) est donc décroissante (car $U_{n+1} \leq U_n$) et elle est minorée par 1 (car $U_n \geq 1$) $\rightarrow$ (U_n) est convergente.

$\boxed{3}$ on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f continue sur $[1 ; +\infty[$ et la suite (U_n) convergente.

Avec le théorème du point fixe, on peut affirmer que la limite ℓ de (U_n) va vérifier l'égalité $f(\ell) = \ell$.

D'après la question $\boxed{3}$ de la partie A, on sait alors que l'unique solution est $\boxed{\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{4}$ ⓐ on peut utiliser un tableau de valeurs pour voir à quel moment les termes de la suite se "rapprochent" de la limite $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\approx 1{,}6180$) à 10^{-2} près (soit à 0,01 près). $\rightarrow$ on obtient $\boxed{5}$

on a $U_4 \approx 1{,}6402$
et $U_5 \approx 1{,}6248$
(avec $1{,}6248 - 1{,}6180 = 0{,}0068 < 0{,}01$)

ⓑ La valeur de U_9 va fournir une valeur approchée de la limite $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ à 10^{-4} près (soit à 0,0001 près).