Bac Spé Maths 2024
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour Centres Etrangers
Mercredi 05 Juin 2024

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

## Exercice 1

### Partie A

**1** on utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

et on obtient $f'(x) = \dfrac{\overbrace{0,96}^{u'} \times \overbrace{(0,93x+0,03)}^{v} - \overbrace{0,96x}^{u} \times \overbrace{0,93}^{v'}}{\underbrace{(0,93x+0,03)^2}_{v^2}}$

soit $f'(x) = \dfrac{0,8928x + 0,0288 - 0,8928x}{(0,93x+0,03)^2} = \boxed{\dfrac{0,0288}{(0,93x+0,03)^2}}$

**2** La fonction $f'$ s'écrit comme le quotient d'un nombre POSITIF et d'une expression au carré (donc POSITIVE).

Donc on a $f'(x) > 0$ sur $[0;1]$

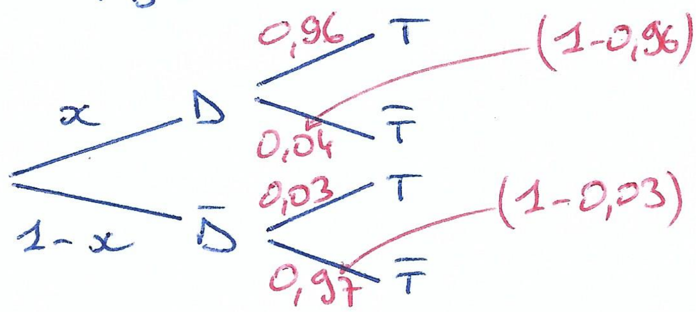
Donc la fonction $f$ est croissante sur $[0;1]$.

### Partie B

**1** L'énoncé nous donne $p_D(T) = 0,96$

et $p_{\bar{D}}(T) = 0,03$

↳ on obtient l'arbre :




**2** on cherche $p(D \cap T) = p(D) \times p_D(T)$

↳ $p(D \cap T) = x \times 0,96 = \boxed{0,96x}$

**3** on utilise la formule des probabilités totales

↳ on a $p(T) = p(D \cap T) + p(\bar{D} \cap T)$

$= 0,96x + (1-x) \times 0,03$

$= 0,96x + 0,03 - 0,03x$

soit $\boxed{p(T) = 0,93x + 0,03}$

$\boxed{4}$ La probabilité d'avoir un sportif dopé est donc égal à $\frac{50}{1000} = 0{,}05 \rightarrow$ on a $p(D) = x = 0{,}05$.

or on cherche la probabilité que le sportif soit dopé sachant que le test est positif, soit $p_T(D)$.

et on a $p_T(D) = \frac{p(T \cap D)}{p(T)} = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} = f(x)$ avec $x = 0{,}05$ !

↳ on a donc bien $p_T(D) = f(0{,}05) \approx \boxed{0{,}63}$ ou $\boxed{63\%}$

$\boxed{5}$ ⓐ on cherche $x$ pour que $p_T(D) \geq 0{,}9$
c'est à dire $f(x) \geq 0{,}9$

Donc on résout $\frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} \geq 0{,}9$

soit $0{,}96x \geq 0{,}9(0{,}93x + 0{,}03)$
soit $0{,}96x \geq 0{,}837x + 0{,}027$
soit $0{,}96x - 0{,}837x \geq 0{,}027$
soit $0{,}123x \geq 0{,}027 \rightarrow x \geq \frac{0{,}027}{0{,}123} \approx 0{,}2195$

Donc, à partir de $x = \boxed{0{,}22}$, on aura $p_T(D) \geq 0{,}9$.

ⓑ par ce choix, la valeur de $x$ va augmenter et elle va supérieure à 0,05.
or, on sait avec la partie A, que la fonction $f$ est croissante.
Donc la valeur de $f(x)$, et donc de $p_T(D)$, va augmenter également et elle va dépasser 0,22 !!

Exercice 2

1) a) on résout l'équation $2xe^{-x} = x$

c'est à dire $2xe^{-x} - x = 0$

soit $x(2e^{-x} - 1) = 0$ on reconnait une équation produit nul

$x = 0$ $\qquad$ $2e^{-x} - 1 = 0$

$e^{-x} = \frac{1}{2} \to \cancel{\ln} \cancel{e}^{-x} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\to -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $= \ln(1) - \ln(2)$

$= -\ln(2)$

$\to x = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$

Donc on obtient $S = \{0 ; \ln(2)\}$

b) on applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$

et on obtient $f'(x) = \underbrace{2}_{u'} \times \underbrace{e^{-x}}_{v} + \underbrace{2x}_{u} \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v'}$

soit, en factorisant, $\boxed{f'(x) = 2e^{-x}(1-x)}$

c) on fait le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $2(1-x)$ | | $+$ | $0$ |
| $e^{-x}$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2e^{-1} = \frac{2}{e}$ |

Donc la fonction $f$ est croissante sur $[0 ; 1]$

et on a $f(0) = 2 \times 0 \times e^{-0} = 0$ et $f(1) = 2 \times 1 \times e^{-1} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$.

2) a) Initialisation

on a $U_0 = 0{,}1$ et $U_1 = f(U_0) = 2 \times 0{,}1 \times e^{-0{,}1} \simeq 0{,}18$

Donc on a bien $0 \leq U_0 < U_1 < 1$

<u>Hérédité</u> : on suppose que $0 \leq U_n < U_{n+1} < 1$

et on applique la fonction $f$ qui est croissante sur $[0;1]$ et qui, donc, conserve l'ordre.

On obtient : $f(0) \leq f(U_n) < f(U_{n+1}) \leq f(1)$

soit $0 \leq U_{n+1} < U_{n+2} \leq \frac{2}{e} \; (< 1)$

et on obtient bien le résultat voulu.

ne pas oublier !

ⓑ La suite $(U_n)$ est donc croissante (car $U_n < U_{n+1}$) et majorée par 1 (car $U_n \leq 1$) → la suite est convergente.

$\boxed{3}$ on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f$ continue sur $[0;1]$.

→ la limite $\ell$ de $(U_n)$ va vérifier l'égalité $f(\ell) = \ell$.

On reprend les solutions de la question $\boxed{1}$ ⓐ

et la limite $\ell$ est égale à $\cancel{0}$ impossible car $U_0 = 0,1$ et $(U_n)$ est croissante !

ou à $\ln(2)$ qui est donc la réponse !

$\boxed{4}$ ⓐ La suite est croissante et elle converge vers $\ln(2)$

Donc les termes de la suite ne peuvent pas dépasser $\ln(2)$

Donc on a : $U_n \leq \ln(2)$ pour tout $n$

ou $\ln(2) - U_n \geq 0$.

ⓑ voici les deux lignes complétées :

```
while ln(2)-u > 0.0001 :
```

et

```
u = 2*u*exp(-u)
```

c'est la notation reconnue par Python.

ⓒ on peut utiliser un tableau de valeurs et donner la réponse : $\boxed{n = 11}$

## Exercice 3

1 On va poser $f(x) = a$, où $a$ est une constante.
↳ on aura donc $f'(x) = 0$.
La fonction $f$ est solution de $(E_0)$ si on a :
$f' = f$ soit $0 = a$ donc la constante est nulle.

2 Le cours nous donne les solutions des équations différentielles du type $y' = ay$ → elles s'écrivent sous la forme $x \to ke^{ax}$ (avec $k \in \mathbb{R}$).
Donc les solutions de $y' = y$ s'écrivent $\boxed{x \to ke^{x} \ (k \in \mathbb{R})}$

3 On a $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$
↳ $h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$
et on vérifie que l'on a bien $h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$
or on a $h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$
et $h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$
$= \cos(x) - 2\sin(x) = h'(x)$ !!

↳ on a bien le résultat demandé.

4 On sait que $h$ est une solution de $(E)$
c'est à dire $h' = h - \cos(x) - 3\sin(x)$.
Donc $f$ est solution de $(E)$ est équivalent à
$f$ et $h$ sont solutions de $(E)$
c'est à dire $f' = f - \cos(x) - 3\sin(x)$
$h' = h - \cos(x) - 3\sin(x)$
c'est à dire $f' - h' = f - h$ (par soustraction)
c'est à dire $(f-h)' = f - h$ → on reconnait $(E_0)$
Donc $f$ est solution de $(E)$ est équivalent à
$f - h$ est solution de $(E_0)$.

5 On a donc $f$ est solution de (E) est équivalent à $f-h$ est solution de ($E_0$)

et donc, d'après la question 2, on aura :

$$f(x) - h(x) = ke^{x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

soit $f(x) = h(x) + ke^{x}$

soit $f(x) = \underbrace{2\cos(x) + \sin(x)}_{\text{solution particulière de (E)}} + \underbrace{ke^{x}}_{\text{solution générale de } (E_0)} \quad (k \in \mathbb{R})$

6 On remplace $x$ par $0 \to \underbrace{2\cos(0)}_{=1} + \underbrace{\sin(0)}_{=0} + k\underbrace{e^{0}}_{=1}$

et on veut $g(0) = 0$

c'est à dire $2 + k = 0 \to k = -2$.

Donc la fonction $g$ demandée s'écrira :

$$\boxed{x \to g(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - 2e^{x}}$$

7 Aucune difficulté particulière ici car on peut donner les primitives termes à termes !

Une primitive de $x \to -2e^{x} + \sin(x) + 2\cos(x)$

sera $x \to -2e^{x} - \cos(x) + 2\sin(x)$.

On a donc : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (-2e^{x} + \sin(x) + 2\cos(x))dx$

$$= \left[-2e^{x} - \cos(x) + 2\sin(x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= (-2e^{\pi/2} - \underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=0} + 2\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=1}) - (-2\underbrace{e^{0}}_{=1} - \underbrace{\cos(0)}_{=1} + 2\underbrace{\sin(0)}_{=0})$$

On obtient : $(-2e^{\pi/2} + 2) - (-2 - 1)$

soit $\boxed{-2e^{\pi/2} + 5}$

## Exercice 4

**1** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\3-0\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-(-2)\\-1-0\\2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car $3:1=3$
et $-1:3\neq 3$.

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés (donc ils définissent un plan).

**2** a) On calcule $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=1\times1+3\times3+5\times(-2)=\boxed{0}$

et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=1\times3+3\times(-1)+5\times0=\boxed{0}$

↳ On a donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$.

Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

↳ $\vec{n}$ est donc normal au plan (ABC).

b) On utilise les coordonnées de ce vecteur normal $\vec{n}$ dans l'équation cartésienne $\underset{1}{a}x+\underset{3}{b}y+\underset{5}{c}z+d=0$

on obtient donc : $x+3y+5z+d=0$

or le point A, par exemple, appartient à ce plan.

Donc on a $\underset{x_A}{-2}+3\times\underset{y_A}{0}+5\times\underset{z_A}{2}+d=0 \rightarrow 8+d=0$
soit $d=-8$

Donc on obtient bien pour (ABC) : $\boxed{x+3y+5z-8=0}$

c) On vérifie juste si le point D appartient au plan (ABC).

↳ On a $\underset{x_D}{0}+3\times\underset{y_D}{0}+5\times\underset{z_D}{3}-8=7\neq0$ donc $D\notin(ABC)$

et les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

**3** a) Le point D appartient bien à $\mathcal{D}_1$ → il suffit de remplacer le paramètre $t$ par 0 pour obtenir les coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

De plus, les coefficients devant ce paramètre $t$ nous donne un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ qui sera donc $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$.

Ce vecteur directeur est donc égal au vecteur normal $\vec{n}$.
Donc la droite $D_1$ passe par le point D et elle est perpendiculaire au plan (ABC) → c'est bien la hauteur voulue.

(b) on résout le système $\begin{cases} t = 1+3s \\ 3t = -1-5s \\ 3+5t = 2-6s \end{cases}$ → on va remplacer $t$ par $1+3s$.

on obtient $\begin{cases} t = 1+3s \\ 3(1+3s) = -1-5s \\ 3+5(1+3s) = 2-6s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1+3s \\ 3+9s = -1-5s \\ 3+5+15s = 2-6s \end{cases}$

c'est à dire $\begin{cases} t = 1+3s \\ 14s = -4 \rightarrow s = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7} \\ 21s = -6 \rightarrow s = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7} \end{cases}$ la valeur est la même !

Les deux droites sont donc bien sécantes, avec les paramètres $s = -\frac{2}{7}$ et $t = 1+3\times\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{1}{7}$.
On obtient les coordonnées du point d'intersection en utilisant, par exemple, la droite $D_1$ $\begin{cases} x = \boxed{1/7} \\ y = 3\times 1/7 = \boxed{\frac{3}{7}} \\ z = 3+5\times\frac{1}{7} = \boxed{\frac{26}{7}} \end{cases}$

4 (a) En reprenant l'énoncé, on constate que ce point H correspond à l'intersection de la droite $D_1$ et du plan (ABC) → on écrit les coordonnées de la représentation de $D_1$ dans le plan (ABC)
→ on obtient $t+3\times 3t+5(3+5t)-8=0$
soit $35t+7=0$ → $t = -\frac{7}{35} = -\frac{1}{5}$
D'où les coordonnées de H $\begin{cases} x = \boxed{-1/5} \\ y = 3\times\left(-\frac{1}{5}\right) = \boxed{-3/5} \\ z = 3+5\times\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{10}{5} = \boxed{2} \end{cases}$

(b) on calcule simplement la longueur DH
→ $DH = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}-0\right)^2+\left(-\frac{3}{5}-0\right)^2+(2-3)^2} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \sqrt{\frac{7}{5}}$ ou $\frac{\sqrt{35}}{5}$
$\boxed{\approx 1,18}$