Bac Spé Maths 2024
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
pour Amérique du Nord
Mercredi 22 Mai 2024

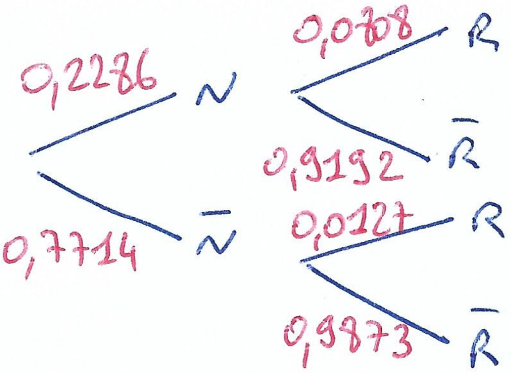
Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1) on a l'arbre

$(1-0{,}2286) \longrightarrow$



2) on calcule $P(N \cap R) = P(N) \times P_N(R)$

$$= 0{,}2286 \times 0{,}0808 \approx \boxed{0{,}0185}$$

3) on utilise la formule des probabilités totales.

$$P(R) = P(N \cap R) + p(\bar{N} \cap R)$$
$$= 0{,}0185 + 0{,}7714 \times 0{,}0127 \approx \boxed{0{,}0283}$$

4) on cherche $p_R(N) = \dfrac{p(N \cap R)}{p(R)} = \dfrac{0{,}0185}{0{,}0283} \approx \boxed{0{,}6537}$

Partie B

1) on aura ici $n = 500$ et $p = 0{,}65$

2) on utilise la calculatrice.

$\hookrightarrow p(X = 325) \approx \boxed{0{,}0374}$

3) on peut obtenir $\underbrace{\text{directement}}_{\text{avec la NUMWORKS}}$ $p(X \geq 325) \approx \boxed{0{,}5206}$

ou on passe par $p(X \geq 325) = 1 - p(\underbrace{X \leq 324}_{})$

avec la TI par exemple et binomFRep.

Donc la probabilité qu'il y ait au moins 325 véhicules neufs parmi les 500 véhicules hybrides rechargeables est environ égale à 0,52 (soit 52%).

Partie C

1) on veut que tous les véhicules soient d'occasion

↳ donc on veut **zéro** véhicule neuf.

↳ on a $p_n = p(X=0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0}$

soit $p_n = (1-0{,}65)^n$ ↳ $\boxed{p_n = 0{,}35^n}$

2) on veut résoudre $q_n \geq 0{,}9999$

soit $p(X \geq 1) \geq 0{,}9999$

soit $1 - \underbrace{p(X=0)}_{\text{ou } p_n\,!!} \geq 0{,}9999$

on obtient $1 - 0{,}35^n \geq 0{,}9999$

c'est à dire $0{,}35^n \leq 0{,}0001$ ← $1-0{,}9999$

soit $\ln 0{,}35^n \leq \ln 0{,}0001$

soit $n \times \ln 0{,}35 \leq \ln 0{,}0001$

soit $n \geq \dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}35}$ $\approx 8{,}77$

inversion car $\ln 0{,}35$ est négatif

Donc on a le résultat voulu à partir de $\boxed{n = 9}$.

Exercice 2

⚠ attention, on a $I(\underline{1};0;0)$ et $B(\underline{3};0;0)$

$\boxed{1}$ on a donc $F(3;0;1)$ $H(0;1;1)$ et $M(1{,}5;1;0)$.

$\boxed{2}$ a) on calcule $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1{,}5\\0\\-1\end{pmatrix} = 2\times1{,}5+6\times0+3\times(-1) = \boxed{0}$

et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} = 2\times(-3)+6\times1+3\times0 = \boxed{0}$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs (non colinéaires) du plan (HMF) → $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

b) L'équation du plan (HMF) s'écrira donc à l'aide des coordonnées de son vecteur normal $\vec{n}$.

On aura : $\underset{2}{a}x + \underset{6}{b}y + \underset{3}{c}z + d = 0$

soit $2x+6y+3z+d=0$

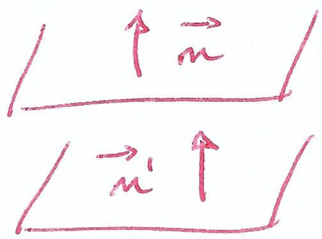
or le point F appartient au plan (HMF) et on aura :

$$2\times\underset{x_F}{3} + 6\times\underset{y_F}{0} + 3\times\underset{z_F}{1} + d = 0$$

c'est à dire $9+d=0$ → $\boxed{d=-9}$.

d'où l'équation du plan (HMF) : $\boxed{2x+6y+3z-9=0}$

c) Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires



et un vecteur normal au plan P sera $\vec{n'}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire avec $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ car on a $2:5=0{,}4$

$6:15=0{,}4$

$3:(-3)=-1\neq0{,}4$.

$\boxed{3}$ on a $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ → on aura $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

et on obtient pour la droite (DG) $\begin{cases} x = 0 + 3\times k \\ y = 1 + 0\times k \\ z = 0 + 1\times k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 1 \\ z = k \end{cases}, k\in\mathbb{R}$

point D   vecteur $\overrightarrow{DG}$

$\boxed{4}$ on "écrit" les coordonnées de (DG) dans le plan (HMF)

et on obtient $2\times(3k) + 6\times 1 + 3\times k - 9 = 0$

soit $9k - 3 = 0 \rightarrow k = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

On obtient alors le point N $\begin{cases} x = 3\times\frac{1}{3} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$ soit $N\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ Le point R appartient-il au plan (HMF) ?

on calcule $2\times \underset{x_R}{3} + 6\times \underset{y_R}{\frac{1}{4}} + 3\times \underset{z_R}{\frac{1}{2}} - 9 = 6 + \frac{6}{4} + \frac{3}{2} - 9 = \boxed{0}$

donc on a bien $R \in (HMF)$.

Le vecteur $\overrightarrow{RG}$ est-il colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$ du plan (HMF) ?

on a $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GR}\begin{pmatrix}3-3=0\\\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

et avec la coordonnée nulle de $\overrightarrow{GR}$, les deux vecteurs ne peuvent pas être colinéaires.

Et, même si le point R appartient bien à (HMF), il ne peut pas être le projeté orthogonal de G.

Exercice 3

1 On a $g'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$

et on peut dresser le tableau suivant

x	0		1
$g'(x)$		$+$	0
$g(x)$	0	$\nearrow$	1

on a $g(0) = 2\times 0 - 0^2 = \boxed{0}$

$g(1) = 2\times 1 - 1^2 = \boxed{1}$

2 On calcule $U_1 = g(U_0) = 2U_0 - U_0^2 = 2\times\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{4}}$

n'oubliez pas les parenthèses !

$U_2 = g(U_1) = 2U_1 - U_1^2 = 2\times\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{15}{16}}$

3 <u>Initialisation</u> : on a $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_1 = \frac{3}{4}$

Donc on a bien $0 < U_0 < U_1 < 1$.

<u>Hérédité</u> : on suppose $0 < U_n < U_{n+1} < 1$

On applique la fonction g qui est croissante sur $[0;1]$

↳ il y a donc conservation de l'ordre.

On obtient donc : $g(0) < g(U_n) < g(U_{n+1}) < g(1)$

soit $0 < U_{n+1} < U_{n+2} < 1$

et ce qu'il fallait montrer !!

4 La suite (U_n) est donc croissante (car $U_n < U_{n+1}$)

et majorée par 1 (car $U_n < 1$) $\rightarrow$ (U_n) est convergente.

5 On a $U_{n+1} = g(U_n)$ avec g continue sur $[0;1]$.

Donc la limite ℓ de (U_n) va vérifier l'égalité $g(\ell) = \ell$.

↳ on résout donc $2\ell - \ell^2 = \ell$

soit $\ell - \ell^2 = 0 \rightarrow \ell(\ell - 1) = 0$.

Il y a deux valeurs possibles :

$\cancel{\ell = 0}$ impossible ici car (U_n) est croissante et $U_0 = 0$

et $\ell = \boxed{1}$ $\rightarrow$ c'est la bonne valeur $\rightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1}$

$\boxed{6}$ on va partir de V_{n+1} et on veut obtenir $2V_n$.

on a $V_{n+1} = \ln(1 - U_{n+1})$

$= \ln(1 - (2U_n - U_n^2))$

$= \ln(1 - 2U_n + U_n^2)$

L'astuce est ici de remarquer que $1 - 2U_n + U_n^2 = (1 - U_n)^2$

on obtient $V_{n+1} = \ln((1 - U_n)^2)$

$= 2 \times \ln(1 - U_n)$

$= 2 \times V_n$

Donc on a bien $V_{n+1} = 2V_n$

Donc (V_n) est bien une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $V_0 = \ln(1 - U_0) = \ln(1 - \frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2})$

$\boxed{7}$ on applique la formule des suites géométriques.

$V_n = V_0 \times q^{(n-0)} = \ln(\frac{1}{2}) \times 2^n$

$\boxed{8}$ on a $V_n = \ln(1 - U_n) \rightarrow e^{V_n} = \cancel{e}^{\cancel{\ln}(1 - U_n)}$

$\rightarrow$ on a donc $e^{V_n} = 1 - U_n$ soit $U_n = 1 - e^{V_n}$

On a donc $U_n = 1 - e^{\ln(\frac{1}{2}) \times 2^n} = 1 - e^{2^n \times \ln(\frac{1}{2})} = 1 - \cancel{e}^{\cancel{\ln}(\frac{1}{2})^{2^n}}$

$a \ln b = \ln(b)^a$

on obtient finalement $\boxed{U_n = 1 - (\frac{1}{2})^{2^n}}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^{2^n} = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$

et on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{1}$

$\boxed{9}$ il suffit de compléter avec :

```
n = n + 1
u = 2*u - u*u
```

on remplace ainsi la notation u^2

Exercice 4

$\boxed{1}$ on résout $f(x)=0 \to a\ln(x)=0 \to \boxed{x=1}$ (car $a \neq 0$)

$\boxed{2}$ on dérive F $\to F'(x) = a(\underbrace{1\times\ln x + x\times\frac{1}{x}}_{u'\times v + u\times v'} - 1)$

$\to$ on obtient $F'(x) = a(\ln x + 1 - 1) = a\ln x = f(x)$.

On a bien $F'=f \to$ F est bien une primitive de f.

$\boxed{3}$ L'aire cherchée est égale à $\int_1^{x_0} f(x)\,dx = F(x_0) - F(1)$

$\hookrightarrow$ on obtient $a(x_0\ln(x_0) - x_0) - a(1\times\underbrace{\ln 1}_{=0} - 1)$

$= a(x_0\ln(x_0) - x_0) + a$

$\to$ cette aire est égale à $\boxed{a(x_0\ln(x_0) - x_0 + 1)}$

$\boxed{4}$ on commence en cherchant l'équation de T.

On a T : $y = f'(x_0)\times(x - x_0) + f(x_0)$

avec $f(x) = a\ln x$ et $f'(x) = a\times\frac{1}{x} = \frac{a}{x}$

on obtient : $y = \frac{a}{x_0}\times(x - x_0) + a\ln(x_0)$

soit $\boxed{T : y = \frac{ax}{x_0} - a + a\ln(x_0)}$

Le point A correspond alors à l'intersection de cette tangente T avec l'axe des ordonnées.

$\hookrightarrow$ on remplace x par 0 et on obtient les coordonnées de A $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a\times 0}{x_0} - a + a\ln(x_0) \end{pmatrix}$

soit A $\begin{pmatrix} 0 \\ -a + a\ln(x_0) \end{pmatrix}$

Le point B a une abscisse nulle et il a la même ordonnée que le point M, c'est à dire $f(x_0) = a\ln(x_0)$

On a donc les coordonnées de $B\begin{pmatrix} 0 \\ a\ln(x_0) \end{pmatrix}$.

<u>Donc</u> les points A et B ont la même abscisse (nulle) et la distance AB s'obtient par la différence entre les ordonnées de B et de A

↳ $AB = y_B - y_A$ (dans cet ordre car $y_B > y_A$)

↳ $AB = a\ln(x_0) - (-a + a\ln(x_0))$
$= \cancel{a\ln(x_0)} + a - \cancel{a\ln(x_0)}$

↳ $\boxed{AB = a}$ qui ne dépend pas de x_0 !