Bac Spé Maths 2024

Voici la correction complète

de l'épreuve 1

pour Amérique du Nord

Mardi 21 Mai 2024

Correction proposée par

Bruno Swiners

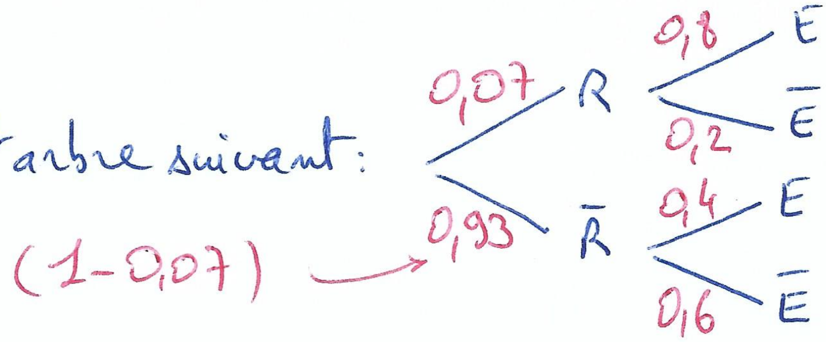
sur

www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

$\boxed{1}$ on a l'arbre suivant :



et on a $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = \boxed{0,056}$

$\boxed{2}$ on utilise la formule des probabilités totales.

↳ $p(E) = p(R \cap E) + p(\bar{R} \cap E)$
$= 0,056 + 0,93 \times 0,4 = \boxed{0,428}$

$\boxed{3}$ on calcule $p_E(R) = \dfrac{p(E \cap R)}{p(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} \approx \boxed{0,131}$

Partie B

$\boxed{1}$ on considère ici que l'on a des tirages indépendants, se passant dans les mêmes conditions, avec 2 issues possibles → loi binomiale avec $n = 30$
et $p = p(R) = 0,07$.

On en déduit $E(X) = n \times p = 30 \times 0,07$

↳ $\boxed{E(X) = 2,1 \text{ objets rares}}$

$\boxed{2}$ on cherche $p(X < 6)$ mais, avec les calculatrices, il faut en fait calculer $p(X \leq 5)$.

↳ on a $p(X < 6) = p(X \leq 5) \approx \boxed{0,984}$

$\boxed{3}$ Avec la NumWorks, on obtient directement les valeurs suivantes : $p(X \geq 2) \approx 0,63$
$p(X \geq 3) \approx 0,351$

Donc la valeur cherchée de k est égale à $\boxed{2}$

cela signifie que la probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares sera supérieure ou égale à 0,5 (ou 50%).

↳ ⚠ pour d'autres calculatrices, on ne peut que calculer $p(X \leq \ldots)$ et on utilisera :

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1)$$
$$p(X \geq 3) = 1 - p(X \leq 2)$$

$\boxed{4}$ on cherche N pour que $p(X \geq 1) \geq 0,95$

soit $1 - p(X=0) \geq 0,95$

soit $1 - \underbrace{\binom{N}{0}}_{=1} \underbrace{p^0}_{=1} \underbrace{(1-p)^{N-0}}_{=(1-0,07)^N = 0,93^N} \geq 0,95$

on obtient : $1 - 0,93^N \geq 0,95$

soit $0,93^N \leq 0,05$ ← $1-0,95$

soit $\ln 0,93^N \leq \ln 0,05$

soit $N \times \ln 0,93 \leq \ln 0,05$

soit $N \geq \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93}$ $\approx 41,28$

inversion car $\ln 0,93$ est négatif.

Donc il faudra tirer un minimum de 42 objets afin d'atteindre l'objectif fixé.

Exercice 2 : Les réponses de ce QCM sont :

1 → C
2 → D
3 → B
4 → A

Voici quelques explications même si ce n'est pas demandé.

Question 1 → aucun "piège" ici.

On a $A\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\1-0\\0-3\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$

Donc on aura pour la droite (AB) $\begin{cases} x = \boxed{1} + \boxed{3} \times t = 1+3t \\ y = \boxed{0} + \boxed{1} \times t = t \\ z = \boxed{3} + \boxed{(-3)} \times t = 3-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

point A — vecteur $\overrightarrow{AB}$

→ réponse $\boxed{C}$.

Question 2 → on cherche la valeur du paramètre t qui permet d'obtenir les coordonnées du point proposé.
Il n'y a que pour le point R que l'on obtiendra une valeur unique pour t.

En effet, on résout $\begin{cases} 3+4t = -3 \rightarrow 4t = -6 \rightarrow t = \frac{-6}{4} = \boxed{-1,5} \\ 6t = -9 \rightarrow t = -\frac{9}{6} = \boxed{-1,5} \\ 4-2t = 7 \rightarrow -2t = 3 \rightarrow t = \frac{3}{-2} = \boxed{-1,5} \end{cases}$

→ réponse $\boxed{D}$

Question 3 → On va commencer par étudier la colinéarité des vecteurs directeurs de (d) et de (d').

On a $\vec{v}_d\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_{d'}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

↳ on a $3 \div 4 = 0,75$ et $-2 \div 6 = -\frac{1}{3} \neq 0,75$

Donc $\vec{v}_d$ et $\vec{v}_{d'}$ ne sont pas colinéaires.

Donc (d) et (d') ne sont pas parallèles et ne sont pas confondues.

On doit alors résoudre le système entre les deux droites.

↳ on résout $\begin{cases} 3+4t=-2+3k \\ 6t=-1-2k \\ 4-2t=1+k \end{cases}$

on peut, par exemple, isoler k dans la 3ᵉ égalité afin de résoudre ce système, en remplaçant ce k dans les deux premières.

↳ $\begin{cases} 3+4t=-2+3(3-2t) \\ 6t=-1-2(3-2t) \\ k=3-2t \end{cases}$

on obtient $\begin{cases} 3+4t=-2+9-6t \\ 6t=-1-6+4t \\ k=3-2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10t=4 \\ 2t=-7 \\ k=3-2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=\frac{4}{10} \\ t=-\frac{7}{2} \\ k=3-2t \end{cases}$

<u>Donc</u> ce système n'a pas de solution car on obtient 2 valeurs différentes pour t !!

<u>Donc</u> les droites ne sont pas sécantes → réponse $\boxed{B}$

<u>Question 4</u>

Le vecteur normal $\vec{n}$ de P doit être colinéaire au vecteur directeur de (d) de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

→ seules les réponses A et C sont possibles.

On remplace alors avec les coordonnées du point I

↳ on a $2\times\underset{x_I}{2}+3\times\underset{y_I}{1}-\underset{z_I}{0}-7=4+3-7=0$

→ réponse $\boxed{A}$

Exercice 3

Partie A

$\boxed{1}$ on a $f'(1) = 3$ ← on décale de 1 et on monte de 3, en partant du point A.

et on obtient $(T) : y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

$\rightarrow y = 3(x-1) + (-1)$ $\rightarrow$ $\boxed{y = 3x - 4}$

$f(1) = 1 \times \ln(1^2) - \frac{1}{1} = -1$

$\boxed{2}$ La fonction semble concave sur $]0;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$. Le point A serait un point d'inflexion.

Partie B

$\boxed{1}$ en $+\infty$, on a $\underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\ln(x^2)}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

en 0, on a $x \ln(x^2) - \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}$ soit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \boxed{-\infty}$

$\underbrace{0 \times (-\infty)}$ qui tend vers 0 par croissance comparée.

$\boxed{2}$ a) on a $f'(x) = \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln(x^2)}_{v} + \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{\frac{1}{x^2} \times 2x}_{v'} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

soit $f'(x) = \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}$

b) On en déduit $f''(x) = \frac{1}{x^2} \times 2x - \frac{2}{x^3}$ ← $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^3}$

$\hookrightarrow f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2(x^2-1)}{x^3} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$

$\boxed{3}$ a) on obtient alors le tableau suivant

x	0		1		$+\infty$
$2(x+1)$		+		+	
$(x-1)$		−	0	+	
x^3	0	+		+	
$f''(x)$	‖	−	0	+	

concave sur $]0;1]$

point d'inflexion en 1

convexe sur $[1;+\infty[$

ⓑ La fonction f'' est la dérivée de la fonction f'.
↳ donc le signe de $f''(x)$ donne les variations de f'.
on obtient le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘	3	↗	

on calcule $f'(1)$
$= \underbrace{\ln 1^2}_{=0} + 2 + \frac{1}{1^2} = \boxed{3}$

Donc le minimum de f' est égal à 3 → $f'(x)$ est strictement positive sur $]0;+\infty[$ → la fonction f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\boxed{4}$ ⓐ on résume tout cela avec le tableau suivant

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

↳ la fonction f est strictement croissante et continue sur $]0;+\infty[$.
On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
et le nombre 0 appartient bien à $]-\infty;+\infty[$.
Donc, en utilisant le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=0$ a bien une unique solution sur $]0;+\infty[$.

ⓑ Avec la calculatrice, on obtient $\boxed{\alpha \simeq 1,33}$

et on sait que $f(\alpha) = 0$
soit $\alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$
on en déduit $\alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$ → $\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$

soit $\cancel{e}^{\ln(\alpha^2)} = e^{\frac{1}{\alpha^2}}$

soit $\boxed{\alpha^2 = e^{\frac{1}{\alpha^2}} \text{ ou } \alpha^2 = e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}}$

Exercice 4

1) On a $I_0 = \int_0^{\pi} \underbrace{e^{-0 \times x}}_{=1} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0)$

soit $I_0 = -(-1) - (-1) = 2 \rightarrow \boxed{I_0 = 2}$

2) a) On a : $e^{-nx} > 0$ sur $\mathbb{R}$

et $\sin x \geq 0$ sur $[0;\pi]$

Donc on a : $e^{-nx} \sin x \geq 0$ sur $[0;\pi]$

$\hookrightarrow \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx \geq 0 \hookrightarrow \boxed{I_n \geq 0}$

b) On calcule $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} e^{-(n+1)x} \sin x \, dx - \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx$

$= \int_0^{\pi} (e^{-(n+1)x} \sin x - e^{-nx} \sin x) \, dx$

et on factorise par $e^{-nx} \sin x$!

On obtient alors $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x (e^{-x} - 1) \, dx$

et on a : $e^{-nx} > 0$ sur $\mathbb{R}$

$\sin x \geq 0$ sur $[0;\pi]$

$e^{-x} - 1 \leq 0$ sur $[0;\pi]$

$\hookrightarrow$ car $(-x)$ est négatif et donc $e^{-x} \leq 1$

On a donc : $e^{-nx} \sin x (e^{-x} - 1) \leq 0$ sur $[0;\pi]$

$\hookrightarrow \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x (e^{-x} - 1) \, dx \leq 0$

$\hookrightarrow \boxed{I_{n+1} - I_n \leq 0}$

c) La suite (I_n) est donc décroissante (car $I_{n+1} - I_n \leq 0$) et minorée (car $I_n \geq 0$) $\rightarrow$ (I_n) est convergente.

3 ⓐ On a $(0 \leq) \sin x \leq 1$ sur $[0;\pi]$

Donc $e^{-nx} \sin x \leq e^{-nx}$ sur $[0;\pi]$

on a multiplié par e^{-nx} qui est positif !

on obtient : $\int_0^\pi e^{-nx} \sin x \, dx \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx$

soit $\boxed{I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx}$

ⓑ La fonction $x \to \frac{e^{-nx}}{-n}$ est une primitive de $x \to e^{-nx}$

Donc on a : $\int_0^\pi e^{-nx} dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^\pi = \frac{e^{-n\pi}}{-n} - \frac{e^{-n\times 0}}{-n} = -\frac{e^{-n\pi}}{n} + \frac{1}{n}$

$= \boxed{\frac{1-e^{-n\pi}}{n}}$

ⓒ On a $\lim_{n \to +\infty} e^{-n\pi} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} (1-e^{-n\pi}) = 1$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1-e^{-n\pi}}{n} = 0$

or on sait que $0 \leq I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx$

cette intégrale est égale à $\frac{1-e^{-n\pi}}{n}$ qui converge vers 0

Donc, en utilisant le théorème des gendarmes, on a $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$

4 ⓐ Comme indiqué par l'énoncé, on va utiliser une intégration par parties de deux façons différentes.

<u>première façon</u> on pose $u(x) = e^{-nx} \rightarrow u'(x) = -ne^{-nx}$

$v'(x) = \sin x \rightarrow v(x) = -\cos x$

Donc $I_n = \left[e^{-nx} \times (-\cos x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -ne^{-nx} \times (-\cos x)\,dx$

$= e^{-n\pi} \times \underbrace{(-\cos\pi)}_{=1} - \underbrace{e^{-n\times 0}}_{=1} \times \underbrace{(-\cos 0)}_{=-1} - n\int_0^{\pi} e^{-nx} \cos x\,dx$

et on obtient $\boxed{I_n = e^{-n\pi} + 1 - n J_n}$

<u>deuxième façon</u> on pose $u(x) = \sin x \rightarrow u'(x) = \cos x$

$v'(x) = e^{-nx} \rightarrow v(x) = \frac{e^{-nx}}{-n}$

Donc $I_n = \left[\sin x \times \frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x \times \frac{e^{-nx}}{-n}\,dx$

$= \underbrace{\sin\pi}_{=0} \times \frac{e^{-n\pi}}{-n} - \underbrace{\sin 0}_{=0} \times \frac{e^{-n\times 0}}{-n} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos x\, e^{-nx}\,dx$

et on obtient $\boxed{I_n = \frac{1}{n} J_n}$

ⓑ on a $I_n = \frac{1}{n} J_n$ soit $J_n = n I_n$ J_n

Donc on aura $I_n = e^{-n\pi} + 1 - n \times n I_n$

soit $I_n + n^2 I_n = e^{-n\pi} + 1$

soit $(1+n^2) I_n = e^{-n\pi} + 1 \longrightarrow \boxed{I_n = \frac{e^{-n\pi} + 1}{1+n^2}}$

5 on écrira tout simplement

while I >= 0,1