Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
pour Asie
Vendredi 24 Mars 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

1) on peut prendre le triangle rectangle FGB comme base

$\rightarrow$ Aire Base $= \frac{FG \times FB}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

et la hauteur associée est IF avec $IF = \boxed{\frac{1}{2}}$

Donc Volume FIGB $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{12}}$

2) on a $I\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ fallait-il donner directement ce résultat ou utiliser les formules pour un milieu, c'est à dire $\begin{pmatrix} \frac{x_E + x_F}{2} \\ \frac{y_E + y_F}{2} \\ \frac{z_E + z_F}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} \\ \frac{0+0}{2} \\ \frac{1+1}{2} \end{pmatrix}$?

3) on va montrer que $\vec{DJ}$ est $\perp$ à 2 vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{BG}$.

on a $\vec{BI}\begin{pmatrix} 1/2 - 1 = -1/2 \\ 0 - 0 = 0 \\ 1 - 0 = 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BG}\begin{pmatrix} 1 - 1 = 0 \\ 1 - 0 = 1 \\ 1 - 0 = 1 \end{pmatrix}$

et on a $\vec{DJ} = \begin{pmatrix} 2 - 0 = 2 \\ 0 - 1 = -1 \\ 1 - 0 = 1 \end{pmatrix}$

on calcule $\vec{DJ} \cdot \vec{BI} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) \times 0 + 1 \times 1 = \boxed{0}$

et $\vec{DJ} \cdot \vec{BG} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = \boxed{0}$

4) $\vec{DJ}$ est donc un vecteur normal à (BIG) $\rightarrow$ ses coordonnées seront les nombres $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de l'équation $ax + by + cz + d = 0$

$\rightarrow$ on obtient $2x - y + z + d = 0$

or $B \in (BIG) \rightarrow 2 \times \underset{x_B}{1} - \underset{y_B}{0} + \underset{z_B}{0} + d = 0 \rightarrow 2 + d = 0$

$\rightarrow d = -2$

on obtient bien $\boxed{2x - y + z - 2 = 0}$

5) $\vec{DJ}$ sera donc un vecteur directeur de la droite d

on obtient
$$\begin{cases} x = \underset{\text{point F}}{1} + k \times \underset{\text{vecteur } \vec{DJ}}{2} = 1 + 2k \\ y = 0 + k \times (-1) = -k \\ z = 1 + k \times 1 = 1 + k \end{cases}$$

6 a) on "met" la droite dans l'équation du plan

$\rightarrow 2\times(1+2k)-(-k)+(1+k)-2=0$

soit $2+4k+k+1+k-2=0 \rightarrow 6k+1=0 \rightarrow k=-1/6$

on obtient alors L $\begin{cases} x = 1+2\times\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}} \\ y = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{6}} \\ z = 1+\left(-\frac{1}{6}\right) = \boxed{\frac{5}{6}} \end{cases}$

b) on calcule $FL = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{6}-0\right)^2+\left(\frac{5}{6}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}}$

c) on a déjà la valeur du volume FIGB $\rightarrow \frac{1}{12}$
et on peut alors l'exprimer en prenant le triangle IGB comme base, qui aura FL comme hauteur associée

On obtient : $\text{Volume}_{FIGB} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\,\text{Aire}_{IGB} \times \text{Hauteur}_{FL}$

soit $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{IGB} \times \frac{1}{\sqrt{6}}$

et on obtient $\text{Aire}_{IGB} = \frac{3\sqrt{6}}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{4}}$

Exercice 2

Partie A

1) on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \boxed{1}$

2) on a ici une forme indéterminée
→ on factorise par e^x en utilisant $e^{2x} = (e^x)^2$

on a $g(x) = \underbrace{e^x}_{+\infty} \underbrace{\left(\underbrace{e^x}_{+\infty} - 1 + \underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 0}\right)}_{+\infty}$

soit $+\infty \times +\infty$

→ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$

3) on a $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$
→ $g'(x) = 2e^{2x} - e^x = \boxed{e^x(2e^x - 1)}$

4) on a $e^x > 0$ pour tout x
et on résout $2e^x - 1 = 0 \to e^x = \frac{1}{2} \to x = \ln(\frac{1}{2})$
$= -\ln 2$

on obtient le tableau :

x	$-\infty$		$\ln(1/2)$		$+\infty$
signe de $2e^x - 1$ ou $g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘		↗	$+\infty$

$g(\ln(1/2)) = e^{2\ln(\frac{1}{2})} - e^{\ln\frac{1}{2}} + 1$
$= e^{\ln(\frac{1}{2})^2} - e^{\ln 1/2} + 1$
$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{3}{4}}$

5) Le minimum de g étant égal à $\frac{3}{4}$ (positif), on aura $\boxed{g(x) > 0}$ pour tout x

6) on obtiendrait un trinôme en écrivant $e^{2x} - e^x + 1$ sous la forme $(e^x)^2 - e^x + 1$ qui devient $X^2 - X + 1$
→ ce trinôme n'a aucune racine (son discriminant Δ est égal à -3 → négatif), et il est toujours strictement positif.

Partie B

1) on a $f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1) = \ln(g(x))$
avec $g(x) > 0$ pour tout x. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) on applique la formule $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ avec la fonction g.
↳ on obtient $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

3) on a $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$
avec $f'(0) = \frac{e^{0}(2e^{0} - 1)}{e^{2\times 0} - e^{0} + 1} = \frac{1}{1} = 1$ (car $e^{0} = 1$!!)
et $f(0) = \ln(e^{2\times 0} - e^{0} + 1) = \ln 1 = 0$
on obtient donc : $\boxed{y = x}$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$!

4) on sait que $g'(x) > 0$ sur $]-\ln 2 ; +\infty[$
et $g(x) > 0$ sur ce même intervalle
Donc on a $f'(x) > 0$ sur $]-\ln 2 ; +\infty[$
Donc la fonction est strictement croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$

5) La fonction f est strictement croissante et continue sur $[-\ln 2 ; +\infty[$.
on a : $f(-\ln 2) = \boxed{\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0{,}3}$
et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

on a bien le nombre 2 qui appartient à l'intervalle image $[\ln\left(\frac{3}{4}\right) ; +\infty[$
et, donc, en appliquant le corollaire du TVI, on montre que $f(x) = 2$ a une unique solution sur $[-\ln 2 ; +\infty[$.

et on obtient : $\boxed{1{,}12 < \alpha < 1{,}13}$

Partie C

<u>Conjecture 1</u> → VRAIE car il y a au moins la solution α (qui sera même la seule)

conjecture 2 → FAUSSE, on a f croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$ avec $-\ln 2 \approx -0,7 \neq -0,5$.

conjecture 3 → FAUSSE, on a obtenu $y = x$.

Exercice 3

1) a) $V_0 = 2g$ de polonium $= 2 \times 3 \times 10^{21} = 6 \times 10^{21}$

b) baisse de 0,5% → coefficient multiplicateur $\left(1 - \frac{0,5}{100}\right)$
$= \boxed{0,995}$

et on ajoute 0,005g de polonium
soit $0,005 \times 3 \times 10^{21} = \boxed{1,5 \times 10^{19}}$.

2) a) Init on a $V_0 = \boxed{6 \times 10^{21}}$

et $V_1 = 0,995\, V_0 + 1,5 \times 10^{19}$
$= 0,995 \times 6 \times 10^{21} + 1,5 \times 10^{19} = \boxed{5,985 \times 10^{21}}$

Donc on a bien $\boxed{0 \leq V_1 \leq V_0}$ $\boxed{\text{OK}}$

Hérédité : on suppose $0 \leq V_{n+1} \leq V_n$

soit $0 \leq 0,995\, V_{n+1} \leq 0,995\, V_n$ (en multipliant par 0,995)

soit $1,5 \times 10^{19} \leq 0,995\, V_{n+1} + 1,5 \times 10^{19} \leq 0,995\, V_n + 1,5 \times 10^{19}$
(en ajoutant $1,5 \times 10^{19}$)

soit $\boxed{(0 \leq)\ 1,5 \times 10^{19} \leq V_{n+2} \leq V_{n+1}}$ $\boxed{\text{OK}}$

b) La suite (V_n) est donc décroissante (car $V_{n+1} \leq V_n$)
et minorée (car $V_n \geq 0$).
Donc (V_n) est convergente

3) a) on a $U_{n+1} = V_{n+1} - 3 \times 10^{21}$

Travail très classique !!

$= 0,995\, V_n + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21}$

$= 0,995 (U_n + 3 \times 10^{21}) + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21}$

$= 0,995\, U_n + \underbrace{0,995 \times 3 \times 10^{21} + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21}}_{\boxed{0}}$

soit $U_{n+1} = 0,995\, U_n$

→ suite géométrique de $\boxed{\text{raison } 0,995}$
et de premier terme $U_0 = V_0 - 3 \times 10^{21}$
$= 6 \times 10^{21} - 3 \times 10^{21} = \boxed{3 \times 10^{21}}$

b) on a donc $U_n = U_0 \times q^{(n-0)} = 3\times 10^{21} \times 0{,}995^n$

et $V_n = U_n + 3\times 10^{21} = 3\times 10^{21} \times 0{,}995^n + 3\times 10^{21}$

soit $\boxed{V_n = 3\times 10^{21}(0{,}995^n + 1)}$

c) on a $-1 < 0{,}995 < 1 \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}995^n = 0$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 3\times 10^{21}$

↳ à terme, il y aura 3×10^{21} noyaux dans le polonium

4) on résout $V_n < 4{,}5\times 10^{21}$

soit $3\times 10^{21}(0{,}995^n + 1) < 4{,}5\times 10^{21}$

soit $0{,}995^n < \underbrace{\frac{4{,}5\times 10^{21}}{3\times 10^{21}} - 1}_{= 1{,}5 - 1 = 0{,}5\ !}$

soit $\ln 0{,}995^n < \ln 0{,}5 \rightarrow n \times \ln 0{,}995 < \ln 0{,}5$

on a divisé par $\ln 0{,}995$ qui est négatif.

$\rightarrow n > \underbrace{\frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}995}}_{\approx 138{,}3}$

→ à partir de $\boxed{139 \text{ jours}}$!

5) a) on pourra écrire

```
V = 0,995 * V + 1,5 * 10 ** 19
```

ou `V = 3 * 10 ** 21 * (0,995 ** k + 1)`

multiplication — puissance — c'est k qui est la variable ici

b) on veut 52 semaines soit $52\times 7 = 364$ jours

↳ donc il faudra saisir noyaux (364).

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ c'est le QCM !

Les réponses sont : 1 → B
2 → C
3 → B
4 → D
5 → A

voici quelques explications même si ce n'est pas demandé.

<u>Question 1</u> : il faut calculer le rang n qui permet d'obtenir 2023 avec la suite arithmétique dont la formule est $U_n = U_0 + (n-0) \times \text{raison}$

soit $U_n = 7 + n \times 3 = 3n + 7$

→ on résout $3n + 7 = 2023$ → $3n = 2016$

→ $n = \frac{2016}{3} = \boxed{672}$

→ on a $U_0 = 7$ $U_1 = 10 \dots U_{672} = 2023$

soit $\boxed{\text{673 termes}}$ (car on démarre du rang 0 !) → $\boxed{B}$

<u>Question 2</u> : dans la liste, on alterne les nombres PAIRS et les nombres IMPAIRS

→ le dernier 2023 est IMPAIR et il reste donc 672 nombres qui se partage équitablement en deux

soit $\frac{672}{2}$ nombres PAIRS → 336 PAIRS

on obtient donc une proba $\frac{336}{673}$ → $\boxed{C}$

<u>Question 3</u> : la question revient à trouver $p(A \cap B)$ qui est donné dans l'énoncé !!

→ $\frac{34}{673}$ → $\boxed{B}$

<u>Question 4</u> : on cherche $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

or, on a $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{168}{673} = \frac{505}{673}$

et $p(B)$ se calcule avec les probabilités totales

$\rightarrow p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$

$= \frac{34}{673} + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$

$= \frac{34}{673} + \frac{505}{673} \times \frac{33}{505} = \frac{67}{673}$

$\rightarrow$ on obtient $p_B(A) = \frac{34/673}{67/673} = \frac{34}{67} \rightarrow \boxed{D}$

<u>Question 5</u> : on aurait une loi binomiale avec $n = 10$ et $p = p(\text{multiple de } 4) = p(A)$

$= \frac{168}{673}$

on cherche ici $p(X = 0)$

$= \underbrace{\binom{10}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times \underbrace{(1-p)}_{\frac{505}{673}}^{10-0} = \left(\frac{505}{673}\right)^{10} \rightarrow \boxed{A}$