

Exercice 8

AFFIRMATION 1 → inutile ici d'être un spécialiste de Python ou de programmer sa calculatrice !
On calcule ici les termes de la suite

↪ on a $U_0 = \boxed{0}$

$$U_1 = 3 \times U_0 + 1 = 3 \times 0 + 1 = \boxed{1}$$

$$U_2 = 3 \times U_1 + 1 = 3 \times 1 + 1 = \boxed{4}$$

$$U_3 = 3 \times U_2 + 1 = 3 \times 4 + 1 = \boxed{13}$$

$$U_4 = 3 \times U_3 + 1 = 3 \times 13 + 1 = \boxed{40} \neq 42 !!$$

or liste (6) va afficher les six premiers termes de la suite (U_n) , ce qui donnerait $[0, 1, 4, 13, \boxed{40}, 121]$.

↪ AFFIRMATION FAUSSE

AFFIRMATION 2 → en calculant les premiers termes avec $U_{n+1} = 3U_n + 1$ et avec $U_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$, on peut constater que l'affirmation sera vraie et on doit alors le prouver avec un raisonnement par récurrence.

Initialisation on a $U_0 = 0$

$$\text{et on a bien } U_0 = \frac{1}{2} \times 3^0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} = 0$$

↪ la formule est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité on suppose $U_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$

$$\text{Prouvons que } U_{n+1} = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{↪ On part de } U_{n+1} &= 3U_n + 1 \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2} \right) + 1. \end{aligned}$$

on remplace U_n avec l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned} \text{↪ } U_{n+1} &= 3 \times \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{3}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 3^n - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{soit } U_{n+1} = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$$

On a donc bien montré que $U_{n+1} = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$
et la formule proposée est donc correcte

→ AFFIRMATION VRAIE

AFFIRMATION 3

On va donc utiliser la formule $U_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$

$$\hookrightarrow \text{on calcule } U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \times 3^n + \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3^n \times 3 - \frac{1}{2} \times 3^n$$

$$= \frac{1}{2} \times 3^n \times (3 - 1).$$

*on factorise
par $\frac{1}{2} \times 3^n$*

$$= \frac{1}{2} \times 3^n \times \cancel{2}$$

$\hookrightarrow$ on obtient donc $U_{n+1} - U_n = 3^n$ et on obtient
bien un multiple de 3

→ AFFIRMATION VRAIE