Exercice 7 → les méthodes à utiliser ici sont très classiques (seule l'utilisation des vecteurs colinéaires pour montrer l'alignement peut surprendre).
Par contre, il faut être bien entraîné pour les calculs avec exponentielle et ln !!

1 a) on a $f(x) = x + 0{,}5e^{-x}$

$\hookrightarrow f'(x) = 1 + 0{,}5 \times (-e^{-x}) = \boxed{1 - 0{,}5e^{-x}}$

b) on résout $f'(x) = 0$, puis on utilisera des valeurs tests.

$\hookrightarrow f'(x) = 0 \iff 1 - 0{,}5e^{-x} = 0$

soit $-0{,}5e^{-x} = -1$

soit $e^{-x} = \frac{-1}{-0{,}5} = 2$

soit $\ln(e^{-x}) = \ln(2)$

soit $-x = \ln(2)$

$\hookrightarrow$ on obtient $x = -\ln(2)$

or on a $\ln(0{,}5) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(2) = -\ln(2)$

Donc on a bien $\boxed{f'(x) = 0}$ pour $\boxed{x = \ln(0{,}5)}$ $(\approx -0{,}7)$

On obtient donc :

valeur test 1 valeur test 2

x	$-\infty$		$\ln(0{,}5)$		$+\infty$
$f'_{0,5}(x)$		$-$	0	$+$	
$f_{0,5}(x)$		↘	minimum pour $f_{0,5}$	↗	

<u>valeur test 1</u> → on prend un nombre entre $-\infty$ et $\ln(0,5)$

→ par exemple (-1) → on calcule $f'(-1) = 1 - 0,5\,e^{-(-1)}$
$\approx -0,36$

Donc $f'(-1)$ est $\boxed{-}$ et on met $\boxed{-}$ dans le tableau pour $f'(x)$ entre $-\infty$ et $\ln(0,5)$

<u>valeur test 2</u> → on prend un nombre entre $\ln(0,5)$ et $+\infty$

→ par exemple (1) → on calcule $f'(1) = 1 - 0,5\,e^{-1}$
$\approx 0,82$

Donc $f'(1)$ est $\boxed{+}$ et on peut mettre $\boxed{+}$ dans le tableau pour $f'(x)$ entre $\ln(0,5)$ et $+\infty$.

$\boxed{2}$ on calcule $f_k(\ln k) = \ln k + k\,e^{-\ln k}$

$$= \ln k + k \times \frac{1}{e^{\ln k}}$$

$$= \ln k + k \times \frac{1}{k} = \boxed{\ln k + 1}$$

$\boxed{3}$ Les coordonnées des points sont :

$$A_{0,5}\begin{pmatrix} \ln 0,5 \\ f_{0,5}(\ln 0,5) = \ln 0,5 + 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_{0,5}\begin{pmatrix} \ln 0,5 \\ \ln 0,5 + 1 \end{pmatrix}$$

et $A_1\begin{pmatrix} \ln 1 \\ \ln 1 + 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A_k\begin{pmatrix} \ln k \\ \ln k + 1 \end{pmatrix}$

On a alors :

$$\overrightarrow{A_1A_{0,5}}\begin{pmatrix} \ln 0,5 - 0 \\ \ln 0,5 + 1 - 1 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{A_1A_{0,5}}\begin{pmatrix} \ln 0,5 \\ \ln 0,5 \end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{A_1A_k}\begin{pmatrix} \ln k - 0 \\ \ln k + 1 - 1 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{A_1A_k}\begin{pmatrix} \ln k \\ \ln k \end{pmatrix}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_{0,5}}$ et $\overrightarrow{A_1A_k}$ sont colinéaires

(on a $\overrightarrow{A_1A_k} = \dfrac{\ln k}{\ln 0,5}\,\overrightarrow{A_1A_{0,5}}$)

Donc les points A_1, $A_{0,5}$ et A_k sont alignés.