

Exercice 6

AFFIRMATION 1 → il faut juste calculer U_1, U_2, U_3 et U_4 .

$$\text{on a } U_1 = \frac{U_0}{1+2U_0} = \frac{1}{1+2 \times 1} = \frac{1}{3}$$

$$U_2 = \frac{U_1}{1+2U_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1+2 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$U_3 = \frac{U_2}{1+2U_2} = \frac{\frac{1}{5}}{1+2 \times \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{7}$$

$$U_4 = \frac{U_3}{1+2U_3} = \frac{\frac{1}{7}}{1+2 \times \frac{1}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{9}{7}} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

→ AFFIRMATION VRAIE.

AFFIRMATION 2 → on va faire un raisonnement par récurrence. Sur mon site, il correspond au type 2 où l'on cherche à démontrer une formule → on partira du lien entre U_{n+1} et U_n .

Initialisation : on a $U_0 = \boxed{1}$

$$\text{et on vérifie } U_0 = \frac{1}{2 \times 0 + 1} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

→ la formule est vérifiée au rang 0.

Hérédité : on suppose $U_n = \frac{1}{2n+1}$

$$\text{et montrons que } U_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3}$$

On part de $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+2U_n}$ et on remplace U_n par $\frac{1}{2n+1}$: c'est l'hypothèse de récurrence.

$$\text{On obtient } U_{n+1} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{1 + 2 \times \frac{1}{2n+1}} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2n+1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1}}$$

$$\text{soit } U_{n+1} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}} = \boxed{\frac{1}{2n+3}}$$

$$\hookrightarrow \text{rappel: } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

Donc l'hérédité est bien vérifiée.

→ AFFIRMATION VRAIE

AFFIRMATION 3 → aucun calcul à faire ici !!

$$\text{On sait maintenant que } U_n = \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{et donc on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

Donc les termes de la suite (U_n) peuvent se rapprocher autant que l'on veut de 0.

et donc la suite (U_n) ne peut pas être minorée par le nombre 10^{-10} (aussi petit soit-il !!).

→ AFFIRMATION FAUSSE