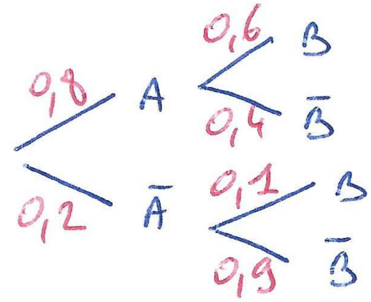
Exercice 3

Partie 1 : 1) on a l'arbre suivant



2) on cherche $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

$= 0,8 \times 0,6 = \boxed{0,48}$

3) on cherche $p(B)$ avec la formule des probabilités totales

$\hookrightarrow p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$

$= 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,1 = \boxed{0,50}$

4) on écrit les lois de probabilité de X_1 et de X_2.

X_1	0	1
Prob	0,2	0,8

↑ c'est $p(A)$

et

X_2	0	1
Prob	0,50	0,50

↑ c'est $p(B)$

on calcule $E(X_1) = 0,2 \times 0 + 0,8 \times 1 = \boxed{0,8}$

et $E(X_2) = 0,5 \times 0 + 0,5 \times 1 = \boxed{0,5}$

et on sait que $E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$

$\hookrightarrow E(X) = 0,8 + 0,5 = \boxed{1,3}$ → c'est la note moyenne que l'on peut attendre pour les deux questions et pour un très grand nombre de candidats.

5) a) on a $p(X=0) = p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,2 \times 0,9 = \boxed{0,18}$

et $p(X=2) = p(A \cap B) = \boxed{0,48}$

or X ne peut prendre que les valeurs 0 ; 1 et 2

2 réponses fausses — 2 réponses vraies

et on a donc $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$

soit $0,18 + P(X=1) + 0,48 = 1$

$\hookrightarrow P(X=1) = 1 - 0,18 - 0,48$

$= \boxed{0,34}$

b) on a la loi de probabilité suivante pour X.

x_i	0	1	2
p_i	0,18	0,34	0,48

avec $E(X) = 1,3$

↳ on a $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + p_3(x_3 - E(X))^2$

$= 0,18 \times (0-1,3)^2 + 0,34 \times (1-1,3)^2 + 0,48 \times (2-1,3)^2$

$= \boxed{0,57}$

c) on reprend les lois de X_1 et de X_2 et on a :

$V(X_1) = 0,2 \times (0-0,8)^2 + 0,8 \times (1-0,8)^2 = \boxed{0,16}$

et $V(X_2) = 0,5 \times (0-0,5)^2 + 0,5 \times (1-0,5)^2 = \boxed{0,25}$

Donc on a $V(X_1) + V(X_2) = 0,16 + 0,25 = \boxed{0,41} \neq V(X)$.

Ce résultat était attendu car les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Partie II 1) on a ici comme une série d'épreuves indépendantes, se passant dans les mêmes conditions, avec 2 issues possibles

↳ loi binomiale de paramètres $n = 8$

et $p = p(\text{bonne réponse}) = \frac{3}{4}$

2) On calcule $P(Y=8) = \underbrace{\binom{8}{8}}_{=1} \times p^8 \times \underbrace{(1-p)^0}_{=1}$

↳ $p(Y=8) = \left(\frac{3}{4}\right)^8 = \frac{6561}{65\,536}$.

3) on applique le cours !

↳ on a $E(Y) = n \times p = 8 \times \frac{3}{4} = \boxed{6}$

et $V(Y) = np(1-p) = 8 \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \boxed{\frac{3}{2}}$

Partie III

1) on a $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1{,}3 + 6 = \boxed{7{,}3}$

et, par indépendance, $V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 0{,}57 + 1{,}5 = \boxed{2{,}07}$

2) a) on a $E(M_n) = \frac{1}{n}\left(E(Z_1) + \dots + E(Z_n)\right) = \frac{1}{n}(n \times 7{,}3) = \boxed{7{,}3}$

b) on a $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)}$

avec $V(M_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(V(Z_1) + \dots + V(Z_n)\right)$ car variables indépendantes.

$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times n \times 2{,}07 = \frac{2{,}07}{n}$

Donc on veut $\sqrt{\frac{2{,}07}{n}} \leq 0{,}5 \rightarrow \frac{2{,}07}{n} \leq 0{,}25$

$\rightarrow n \geq \frac{2{,}07}{2{,}5}$

$\approx 8{,}28$

soit des valeurs de n à partir de 9.

c) on considère $n \geq 9$

et on remarque que $6{,}3 \leq M_n \leq 8{,}3$

correspond à $E(M_n) - 1 \leq M_n \leq E(M_n) + 1$

c'est à dire $|M_n - E(M_n)| \leq 1$

On utilise alors l'inégalité de Bienaymé Tchebychev

$P(|X - E(X)| > \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ soit $P(|M_n - E(M_n)| > 1) \leq \frac{V(M_n)}{1^2}$

c'est à dire $P(|M_n - E(M_n)| > 1) \leq \frac{2{,}07}{n}$

or $p(|M_n - E(M_n) \leq 1) = 1 - p(|M_n - E(M_n)| > 1)$

Donc $p(|M_n - E(M_n) \leq 1) \geq 1 - \frac{2{,}07}{n}$

$\geq \underbrace{1 - \frac{2{,}07}{9}}_{\approx 0{,}77}$ car $n \geq 9$

soit $p(|M_n - E(M_n) \leq 1) \geq 0{,}75$.