Exercice 2

Partie 1 1) a) on a $f_1(x) = x^1 e^x = xe^x$

et on dérive $F_1(x)$ (pour "retomber" sur $f_1(x)$).

$\hookrightarrow$ on a $F_1'(x) = \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{e^x}_{v} + \underbrace{(x-1)}_{u} \times \underbrace{e^x}_{v'}$

$= \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} = xe^x = f_1(x)$

Donc on a bien $F_1' = f_1$ $\hookrightarrow$ F_1 est une primitive de f_1.

b) On a $I_1 = \int_0^1 x^1 e^x dx = \int_0^1 f_1(x) dx = [F_1(x)]_0^1$

$\hookrightarrow I_1 = F_1(1) - F_1(0) = (1-1)e^1 - (0-1)e^0 = \boxed{1}$

2) On a $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$

$\hookrightarrow$ on pose $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = e^x$

et on a $u'(x) = \underbrace{(n+1)x^n}_{\text{dérivée de } x^{n+1}}$ et $v(x) = \underbrace{e^x}_{\text{primitive de } e^x}$

En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$I_{n+1} = \int_0^1 u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x) v(x) dx$

soit $I_{n+1} = u(1) \times v(1) - u(0) \times v(0) - \int_0^1 (n+1) x^n e^x dx$

$= \underbrace{1^{n+1} \times e^1}_{e} - \underbrace{0^{n+1} \times e^0}_{0} - (n+1) \underbrace{\int_0^1 x^n e^x dx}_{I_n}$

$\hookrightarrow$ on obtient bien $\boxed{I_{n+1} = e - (n+1) I_n}$

3) on aura donc $I_2 = e - 2 \times I_1 = e - 2 \times 1 = \boxed{e-2}$

4) L'appel mystere(5) va afficher la liste des intégrales $[I_1 ; I_2 ; I_3 ; I_4 ; I_5]$,

c'est à dire $[\underbrace{1}_{I_1} ; \underbrace{e-2}_{I_2} ; \underbrace{-2e+6}_{I_3} ; \underbrace{9e-24}_{I_4} ; \underbrace{-44e+120}_{I_5}]$.

Partie 2

1) a) I_n va représenter l'aire sous la courbe de $\mathcal{C}_n$, c'est à dire l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_n$ et les droites verticales d'équations $x=0$ et $x=1$.

b) Il semblerait que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

2) on a $0 \leq x \leq 1$

soit $e^0 \leq e^x \leq e^1 \rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

Donc on aura bien $0 \leq e^x \leq e$

$\rightarrow 0 \leq x^n e^x \leq e \times x^n$

$\rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 e \times x^n dx$

c'est à dire $\boxed{0 \leq I_n \leq e \times \int_0^1 x^n dx}$

3) on calcule $\int_0^1 x^n dx = \underbrace{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]}_{\text{primitive de } x^n}_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Donc l'encadrement $0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$

devient $0 \leq I_n \leq e \times \frac{1}{n+1}$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} e \times \frac{1}{n+1} = 0$

et donc en appliquant le théorème des gendarmes,

on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \boxed{0}$.