Exercice 1

Partie 1

1) il faut vérifier que $u'(x) + u(x) = e^{-x}$

avec $u(x) = xe^{-x}$

et $u'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$

$= e^{-x} - xe^{-x}$

↳ on obtient bien $u'(x) + u(x) = e^{-x} - \cancel{xe^{-x}} + \cancel{xe^{-x}} = e^{-x}$.

2) on résout $y' + y = 0$ soit $y' = -y$

→ on applique le cours avec les équations du type $y' = ay$ dont les solutions sont de la forme $y = Ce^{ax}$.

Les solutions de (E') seront donc de la forme

$\boxed{Ce^{-x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3) Les solutions de (E) s'obtiennent par la somme des solutions de l'équation homogène (E') et d'une solution particulière de (E)

↳ c'est la fonction u du 1)

On obtient donc $\boxed{Ce^{-x} + xe^{-x}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

4) on remplace x par 0 et on veut obtenir 2

soit $C\underbrace{e^{-0}}_{=1} + \underbrace{0 \times e^{-0}}_{=0} = 2 \to C = 2$

↳ On obtient donc $g(x) = 2e^{-x} + xe^{-x} = \boxed{(2+x)e^{-x}}$

Partie 2

1) il me semble que le plus simple ici est d'utiliser les limites en $-\infty$ car on observe une vraie différence en $-\infty$ entre les deux courbes.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{(x+k)}_{-\infty} \times \underbrace{e^{-x}}_{+\infty} = -\infty$

↓ courbe en pointillé

et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

↳ courbe en trait plein.

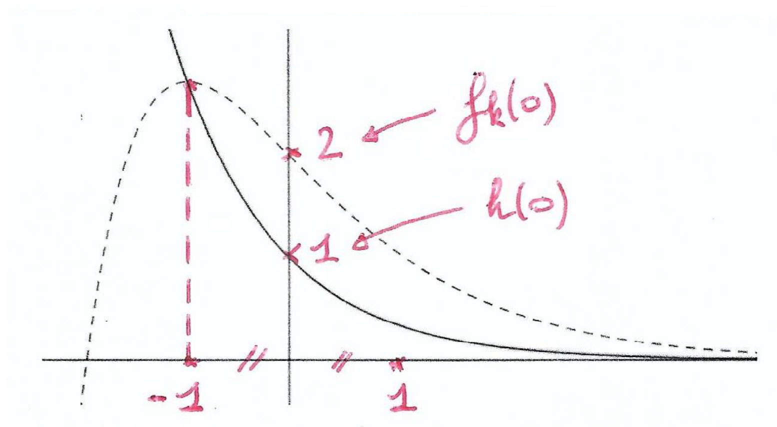
Donc la courbe C correspond à la fonction h.

2) Cette question graphique est assez particulière et des corrections utilisent le point d'inflexion de $\mathcal{C}_k$ (en pointillé) $\boxed{\text{mais}}$ on reste soumis à la lecture graphique de son abscisse.

Et $\boxed{\text{donc}}$, quitte à faire une lecture graphique, je préfère remarquer que l'ordonnée à l'origine de $\mathcal{C}_k$ (en pointillé) est le double de celle de C (en trait plein).

↳ avec la courbe C, on a $h(0) = e^{-0} = 1$ donc on a l'unité de l'axe des ordonnées.

et $f_k(0) = (0+k)e^{-0} = k$ → qui est donc égal à 2 car c'est le double de 1 !



↳ on utilise ensuite le point d'intersection entre $\mathcal{C}_k$ et C pour trouver l'unité de l'axe des abscisses

on résout : $f_2(x) = h(x)$ (on sait que $k=2$).

soit $(x+2)e^{-x} = e^{-x}$

↳ $x+2 = 1$ → $\boxed{x=-1}$

et, par symétrie, on obtient l'unité voulue.