

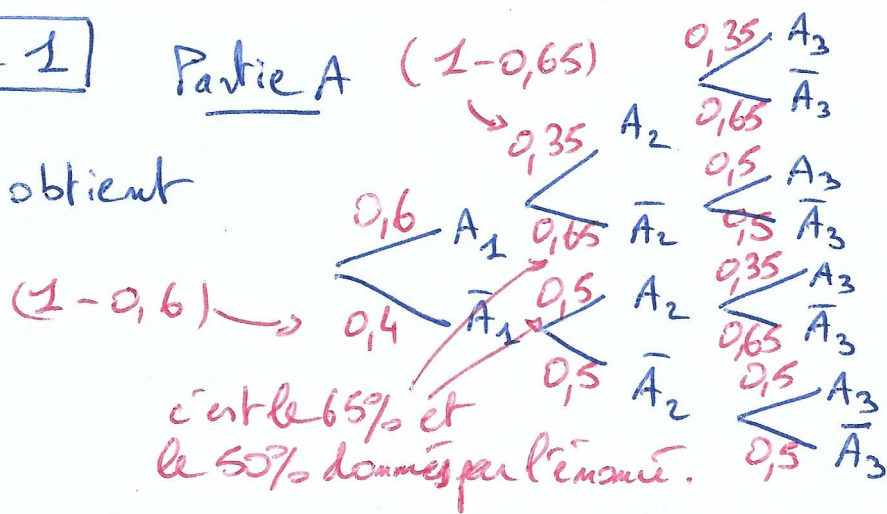
Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
pour Amérique du Sud
Mercredi 27 Septembre 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A (1-0,65)

① on obtient



② le joueur doit atteindre exactement deux fois la cible et il ne doit pas l'atteindre pour le dernier essai. La probabilité cherchée correspond à $p(X=2)$.

$$\text{On a : } p(X=2) = p(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + p(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + p(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

réussite à 2 essais et rate au troisième

$$\hookrightarrow p(X=2) = 0,6 \times 0,35 \times 0,65 + 0,6 \times 0,65 \times 0,5 + 0,4 \times 0,5 \times 0,35$$

$$\hookrightarrow \text{on a bien } p(X=2) = \boxed{0,4015}$$

③ a) on peut remplir la colonne de $p(X=2)$ avec le résultat précédent, puis on utilise le fait que la somme des probabilités sera égale à 1.

$\hookrightarrow$ on obtient :

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,425	0,4015	0,0735

$$(1 - (0,1 + 0,4015 + 0,0735))$$

b) on sait que $E(X) = \sum_{i=0}^3 p_i x_i = p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3$

$$\text{soit } E(X) = 0,1 \times 0 + 0,425 \times 1 + 0,4015 \times 2 + 0,0735 \times 3$$

$$\hookrightarrow \boxed{E(X) = 1,4485}$$

c) Sur une série de 3 lancers, le joueur peut espérer une moyenne de 1,4485 lancers réussis, soit environ 1,5 lancers réussis.

Partie B :

[1] a) On a bien eu des épreuves identiques et indépendantes, ayant 2 issues possibles (gagnant ou perdant).

On a bien une loi binomiale avec :

$$N = \boxed{15} \text{ et } p = p(\text{gagnant}) = p(X=3) = \boxed{0,0735}$$

b) on calcule $p(Y=5) \approx \boxed{0,003}$ (à la calculatrice!)

[2] on cherche N tel que $p(Y \geq 1) \geq 0,98$.

$$\begin{aligned} \text{On sait que } p(Y \geq 1) &= 1 - p(Y=0) \\ &= 1 - \binom{N}{0} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times \underbrace{(1-p)^{N-0}}_{=1} \\ &= 1 - (1 - 0,0735)^N \\ &= 1 - (0,9265)^N \end{aligned}$$

On veut résoudre alors l'inéquation suivante :

$$1 - (0,9265)^N \geq 0,98$$

La méthode est au choix, et donc :

- on peut utiliser un tableau de valeurs en rentrant la suite $(1 - 0,9265^N)$ dans sa calculatrice.
- ou on peut montrer sa maîtrise du calcul algébrique !

L'inéquation correspond à :

$$0,9265^N \leq 0,02$$

$$\text{soit } \ln 0,9265^N \leq \ln 0,02$$

$$\text{soit } N \times \ln 0,9265 \leq \ln 0,02$$

$$\text{soit } N \geq \frac{\ln 0,02}{\ln 0,9265} \approx 51,24.$$

$\ln 0,9265$ est négatif
et on inverse l'inégalité

→ on a le résultat souhaité
à partir de $N = 52$ personnes.

Exercice 2

- ① Les points A, B et C définissent un plan s'ils ne sont pas alignés et donc si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$$\text{On a : } \vec{AB} \begin{vmatrix} 2-1=1 \\ -1-1=-2 \\ -3-(-4)=1 \end{vmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{vmatrix} 0-1=-1 \\ -1-1=-2 \\ -1-(-4)=3 \end{vmatrix}$$

et on voit que $-2 = -2$ et que $1 \neq 3 \rightarrow$ les vecteurs ne sont pas colinéaires $\rightarrow$ A, B et C définissent un plan.

- ② a) on va montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

$$\text{On calcule } \vec{n} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 0$$

$$\text{et } \vec{n} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 1 \times (-2) + 1 \times 3 = 0$$

Donc on a bien $\vec{n} \perp \vec{AB}$ et $\vec{n} \perp \vec{AC} \rightarrow \vec{n}$ est normal à (ABC).

- b) Les coordonnées de $\vec{n}$ correspondent aux coefficients a, b et c de l'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

$$\text{On obtient } 1x + 1y + 1z + d = 0 \text{ soit } x + y + z + d = 0$$

or $A \in (ABC)$ et ses coordonnées vérifient cette équation.

$$\text{On obtient } 1 + 1 + (-4) + d = 0 \text{ soit } d = 2.$$

L'équation cartésienne de (ABC) est bien $\boxed{x + y + z + 2 = 0}$.

- ③ a) On a $1 + 1 + 2 + 2 = 6 \neq 0$. Donc $\Omega \notin (ABC)$

- b) Le point H correspond en fait au point d'intersection entre le plan (ABC) et la droite orthogonale à (ABC) passant par le point Ω . Cette droite sera dirigée par le vecteur normal $\vec{n}$. On en déduit la représentation paramétrique de cette droite :

$$\begin{cases} x = 1 + k \times 1 \\ y = 1 + k \times 1 \\ z = 2 + k \times 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \\ z = 2 + k \end{cases}$$

point Ω vecteur directeur

③ on "met" cette droite dans l'équation du plan (ABC).

on obtient: $(1+k) + (1+k) + (2+k) + 2 = 0$

$$\text{soit } 6 + 3k = 0 \rightarrow k = -\frac{6}{3} = -2.$$

on obtient alors les coordonnées du point H:

$$H \begin{pmatrix} x = 1 + (-2) = -1 \\ y = 1 + (-2) = -1 \\ z = 2 + (-2) = 0 \end{pmatrix}.$$

④ Pas de calcul ici, il faut faire des phrases et ce n'est pas toujours évident le jour du BAC.

Par définition, la distance ΩH entre Ω et son projeté orthogonal H sur (ABC) est la plus courte des distances entre Ω et l'ensemble des points du plan (ABC).

Donc, pour tous les autres points du plan que H,

on aura $\Omega P > 2\sqrt{3}$ qui est le rayon de la sphère

Donc, à part le point H, les autres points de (ABC) ne seront pas sur cette sphère.

⑤ Il y a beaucoup de choses à montrer dans cette question.

* on a $K \in P$ car en utilisant l'équation de P, on vérifie que $3 + 3 - 0 - 6 = 0$.

$$\begin{matrix} \nearrow x_K & \nearrow y_K & \nearrow z_K \\ x_K & y_K & z_K \end{matrix}$$

* on a $K \in S$ car on a bien $\Omega K = 2\sqrt{3}$.

$$\text{En effet, } \Omega K = \sqrt{(x_K - x_\Omega)^2 + (y_K - y_\Omega)^2 + (z_K - z_\Omega)^2}$$

$$\rightarrow \Omega K = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{3}.$$

Donc on a $K \in P$ et $K \in S$ et donc $\boxed{K \in P \cap S}$

* pour montrer $(\Omega K) \perp P$, on va montrer que $\vec{\Omega K}$ est colinéaire au vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ du plan P .

on a $\vec{\Omega K} \begin{pmatrix} 3-1=2 \\ 3-1=2 \\ 0-2=-2 \end{pmatrix}$ qui est bien colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bilan : on a bien $K \in P \cap S$ et $(\Omega K) \perp P$ et donc le plan P est bien tangent à la sphère S au point K .

[6] cette recherche de l'intersection entre 2 plans est assez technique et assez peu fréquente le jour du BAC. on veut résoudre le système suivant :

$$\begin{array}{l} (ABC) \rightarrow x+y+z+2=0 \\ (P) \rightarrow x+y-z-6=0 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x+y = -2-t \\ x+y = 6+t \\ z = t \end{cases}$$

par habitude, z va représenter le paramètre.

or avec les deux premières équations, on obtient $-2-t = 6+t$ soit $t = -4$, c'est à dire $\boxed{z = -4}$

Donc on est dans un cas particulier avec une valeur de z qui est constante. On va poser un nouveau paramètre avec $y = t'$ et on résout alors :

$$\begin{cases} x+y = -2-(-4) = 2 \\ x+y = 6+(-4) = 2 \\ z = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+t' = 2 \\ y = t' \\ z = -4 \end{cases}$$

et on obtient l'équation paramétrique de (Δ) :

$$\begin{cases} x = 2-t' \\ y = t' \\ z = -4 \end{cases}$$

Exercice 3

[2] on a $U_1 = 5 \times U_0 - 8 \times 0 + 6 = 5 \times 0 - 8 \times 0 + 6 = \boxed{6}$

et $U_2 = 5 \times U_1 - 8 \times 1 + 6 = 5 \times 6 - 8 \times 1 + 6 = \boxed{28}$

[2] pour bien prendre en compte le décalage de rang entre $(n+1)$ et (n) , on va devoir écrire $(i-1)$ dans la boucle.

→ on obtient

$$u = 0$$

for i in range $(1, n+1)$:

$$u = 5 * u - 8 * (i-1) + 6$$

[3] a) Initialisation : on a $U_0 = 0$

Donc on a bien $U_0 \geq 2 \times 0 \rightarrow$ vrai au rang 0.

Hérédité : on suppose $U_n \geq 2n$

et on veut montrer $U_{n+1} \geq 2(n+1)$ soit $U_{n+1} \geq 2n+2$

On part alors de : $U_n \geq 2n$

$$\rightarrow 5 \times U_n \geq 10n$$

$$\rightarrow 5U_n - 8n + 6 \geq 10n - 8n + 6$$

$$\text{soit } U_{n+1} \geq 2n+6 (\geq 2n+2) !!$$

et donc on a bien $U_{n+1} \geq 2n+2$.

b) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$ et on a $U_n \geq 2n$.

Avec le théorème de comparaison, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \boxed{+\infty}$

c) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$, on est sûr, par définition, de toujours un rang n_0 qui nous permet d'avoir des termes "aussi grand que l'on veut".

[4] on calcule $U_{n+1} - U_n = 5U_n - 8n + 6 - U_n$
 $= 4U_n - 8n + 6$

or on sait que $U_n \geq 2n \rightarrow 4U_n \geq 8n$

et donc $4U_n - 8n \geq 0$ soit $4U_n - 8n + 6 > 0$!

On a donc $U_{n+1} - U_n > 0 \rightarrow (U_n)$ est bien croissante.

[5] a) il paraît évident que l'on multiplie par 5 pour passer de 1 à 5, de 5 à 25 ... etc ... soit $V_{n+1} = 5 \times V_n$ et on va le montrer !

$$\text{On sait que } U_{n+1} = 5U_n - 2n + 6$$

$$\text{et } V_n = U_n - 2n + 1 \rightarrow U_n = V_n + 2n - 1$$

$$\text{on part alors de } V_{n+1} = U_{n+1} - 2(n+1) + 1$$

$$= 5U_n - 2n + 6 - 2(n+1) + 1$$

$$= 5(V_n + 2n - 1) - 2n + 6 - 2(n+1) + 1$$

$$\text{On obtient } V_{n+1} = 5V_n + 10n - 5 - 2n + 6 - 2n - 2 + 1$$

$$\text{et après réduction on a bien } \boxed{V_{n+1} = 5V_n}$$

b) La suite (V_n) est donc géométrique de raison 5 et de premier terme $V_0 = U_0 - 2 \times 0 + 1 = \boxed{1}$.

$$\text{On en déduit } V_n = V_0 \times q^{(n-0)} = 1 \times 5^n$$

$$\text{soit } V_n = 5^n$$

$$\text{et, donc, puisque } U_n = V_n + 2n - 1,$$

$$\text{on obtient } \boxed{U_n = 5^n + 2n - 1}.$$

Exercice 4 Partie A

① on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \rightarrow$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln 1 = 0$
et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

② a) on sait que $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et que $(e^{-x})' = -e^{-x}$

$$\text{On a donc } f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{1}{4} \text{ avec } \frac{-e^{-x} \times e^x}{1+e^{-x} \times e^x} = \frac{-1}{e^x+1}$$

$$\text{on obtient } f'(x) = \frac{-1}{e^x+1} + \frac{1}{4} = \frac{-4+e^x+1}{4(e^x+1)} = \frac{e^x-3}{4(e^x+1)}$$

b) le dénominateur $4(e^x+1)$ est toujours strictement positif.

$\rightarrow$ le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $e^x - 3$.

on a $e^x - 3 = 0$ lorsque $e^x = 3$ soit $x = \ln 3$.

On en déduit le tableau:

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

c) d'après la formulation de cette question, on peut faire un zoom de ce tableau entre 2 et 5 (avec $\ln 3 \approx 2,0986$ qui est inférieur à 2).

$\rightarrow$ on obtient :

x	2	5
$f(x)$	$f(2)$	$f(5)$



$\rightarrow$ la fonction f est strictement croissante et continue sur $[2; 5]$ avec $f(2) = \ln(1+e^{-2}) + \frac{1}{4} \times 2 \approx 0,63$
et $f(5) = \ln(1+e^{-5}) + \frac{1}{4} \times 5 \approx 1,26$

Donc on a bien $1 \in [f(2); f(5)]$ et d'après le corollaire du Tvi, l'équation $f(x) = 1$ possède une solution unique sur $[2; 5]$.

Partie B

[1] a) on a $e^x > 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
soit $\boxed{f''(x) > 0}$ pour tout x

b) la fonction f est donc CONVEXE sur $\mathbb{R}$, et on va utiliser les propriétés de la convexité.

→ propriété bien connue: Δ est la tangente en 0 et on sait que $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de ses tangentes.

→ propriété moins connue: (MN) est une corde et on sait que $\mathcal{C}_f$ se trouve en-dessous de "ses" cordes.

[2] a) on a $f(-x) = \ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{4}x(-x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{4}x^2$
ou $\ln(1+e^x) = \ln(e^x(e^{-x}+1)) = \ln e^x + \ln(e^{-x}+1)$

et on en déduit $f(-x) = x + \ln(e^{-x}+1) - \frac{1}{4}x^2 = \ln(e^{-x}+1) - \frac{3}{4}x^2$.

b) le plus simple me paraît de passer par l'équation de la tangente Δ : on aura $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

→ $y = -\frac{1}{4}x + \ln 2$ on calcule $f'(0) = -\frac{1}{4}$
et $f(0) = \ln 2$.

les coordonnées de $\boxed{M}$ sont $\left(x, f(x) = \ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{4}x^2 \right)$

et les coordonnées de $\boxed{N}$ sont $\left(-x, f(-x) = \ln(e^{-x}+1) + \frac{3}{4}x^2 \right)$.

et, avec la tangente, on obtient les coordonnées de $\boxed{P}$ et $\boxed{Q}$.

on aura $Q\left(x, -\frac{1}{4}x + \ln 2\right)$ et $P\left(-x, -\frac{1}{4}(-x) + \ln 2 = \frac{1}{4}x + \ln 2\right)$

On en déduit les coordonnées des vecteurs $\vec{NM}$ et $\vec{PQ}$.

→ on a $\vec{NM} \left(x, \ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{4}x^2 - (\ln(1+e^x) + \frac{3}{4}x^2) \right) \rightarrow \left(x, -\frac{1}{2}x \right)$

et on a $\vec{PQ} \left(x, -\frac{1}{4}x + \ln 2 - (\frac{1}{4}x + \ln 2) \right) \rightarrow \left(x, -\frac{1}{2}x \right)$

Donc on a $\vec{NM} = \vec{PQ}$ et $MNPQ$ est un parallélogramme.

Fin