Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour Amérique du Sud
Mardi 26 Septembre 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

1 Avec les croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x = 0$

et, par somme, on a $\lim\limits_{x \to 0} (\underbrace{1}_{\to 1} + \underbrace{x^2}_{\to 0} - \underbrace{2x^2 \ln x}_{\to 0}) = \boxed{1}$

En $\boxed{+\infty}$, on a $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2\ln x) = -\infty$. Par produit, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

2 On a $f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

$\rightarrow f'(x) = 2x - 2(\underbrace{2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x}}_{u' \times v \,+\, u \times v'})$ $\quad x^2 \times \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} = x$

On obtient $f'(x) = 2x - 4x\ln x - 2x = \boxed{-4x\ln x}$

3 On en déduit le tableau suivant

x	0		1		$+\infty$
$-4x$	‖	$-$		$-$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

On a $\ln x = 0$ pour $x = 1$

et on calcule $f(1) = 1 + 1^2 - 2 \times 1^2 \times \ln 1 = 2$

4 La fonction f est strictement décroissante et continue sur $[1 ; +\infty[$. On a $f(1) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

On a bien $0 \in]-\infty ; 2]$ et d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique sur $[1 ; +\infty[$. On la note $\boxed{\alpha}$.

On calcule alors $f(e) = 1 + e^2 - 2e^2 \ln e$
$= 1 + e^2 - 2e^2 = 1 - e^2 \approx -6{,}4$

et on a alors $0 \in [\underbrace{f(e)}_{\approx -6{,}4} ; \underbrace{f(1)}_{=2}]$

et on peut affirmer que $\alpha \in [1 ; e]$.

5 Ce programme Python va ici donner un encadrement de α avec un écart de 10^{-1} au maximum.

on a $e \approx 2{,}72$ et $\alpha \in [1;e]$ → les propositions C et D ne sont pas correctes. L'amplitude, pour la proposition A, est supérieure à 10^{-1}.

Donc la proposition correcte est la $\boxed{B}$.

Partie B

$\boxed{1}$ on a $g'(x) = \dfrac{\overset{u' \times v}{\frac{1}{x} \times (1+x^2)} \overset{-}{-} \overset{u \times v'}{\ln x \times 2x}}{(1+x^2)^2} = \dfrac{\frac{1+x^2 - \ln x \times 2x^2}{x}}{(1+x^2)^2}$

→ on obtient bien $g'(x) = \dfrac{1+x^2 \overset{v^2}{-} 2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2} = \dfrac{f(x)}{x(1+x^2)^2}$

$\boxed{2}$ sur $]0;+\infty[$, le signe de $g'(x)$ dépend donc du signe de $f(x)$.

→ on va reprendre le tableau de variations de f et on va rajouter α et les signes de $f(x)$.

x	0	1	α	$+\infty$
$f(x)$	‖ $\boxed{+}$ ↗	2	0 ↘ $\boxed{-}$	$-\infty$
	1			

On obtient le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
signe de $f(x)$ ou de $g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	↗		↘	

→ g admet un maximum en α.

$\boxed{3}$ on aura $T_1 : y = \underbrace{g'(1)}_{\frac{1}{2}} \times (x-1) + \underbrace{g(1)}_{0}$ → $y = \frac{1}{2}(x-1)$ ou $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

et $T_\alpha : y = \underbrace{g'(\alpha)}_{\frac{f(\alpha)}{\alpha(1+\alpha^2)^2} \text{ avec } f(\alpha)=0} \times (x-\alpha) + \underbrace{g(\alpha)}_{\frac{1}{2\alpha^2} \text{ (cf énoncé)}}$

→ $y = \dfrac{1}{2\alpha^2}$

→ Le point d'intersection vérifiera $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\alpha^2}$

soit $x = \frac{1}{\alpha^2} + 1$ (avec $y = \frac{1}{2\alpha^2}$)

→ on obtient les coordonnées $\left(\frac{1}{\alpha^2}+1 ; \frac{1}{2\alpha^2}\right)$.

Exercice 2

1 a) on calcule $\frac{293\,898}{18\,221\,965} \approx 0{,}016 \approx \boxed{1{,}6\%}$

b) on calcule $\frac{4\,921}{18\,221\,965} \approx 0{,}00027 \approx \boxed{0{,}027\%} < 0{,}1\%$.

2 a) on a bien ici des épreuves identiques et indépendantes ayant 2 issues possibles (ordinaire ou double).

On a bien une loi binomiale avec :

$n = 20$ et $p = p(\text{accouchement double}) = 0{,}016$.

→ et on cherche $p(X=1)$, et on obtient $\boxed{\approx 0{,}236}$

(à la calculatrice !)

b) on cherche n tel que $p(X \geq 1) \geq 0{,}99$

on sait que $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$$= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0}$$

$$= 1 - (1-0{,}016)^n$$

$$= 1 - (0{,}984)^n$$

On veut résoudre alors l'inéquation suivante :

$$1 - (0{,}984)^n \geq 0{,}99$$

La méthode est ici au choix :

- on peut utiliser un tableau de valeurs en rentrant la suite $(1-(0{,}984)^n)$ dans sa calculatrice.
- ou on peut utiliser le calcul algébrique

L'inéquation correspond à

$$0{,}984^n \leq 0{,}01$$

soit $\ln 0{,}984^n \leq \ln 0{,}01$

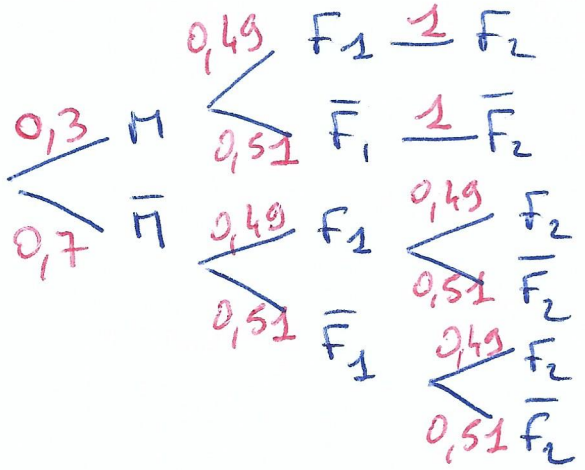
soit $n \times \ln 0{,}984 \leq \ln 0{,}01$

soit $n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}984} \approx 285{,}5$

ln 0,984 est négatif et on inverse l'inégalité

Donc, à partir de 286 accouchements, la probabilité d'avoir au moins 1 accouchement double est supérieure ou égale à 99%.

3 a) on a le tableau



b) on cherche $p(F_1 \cap F_2)$ et on utilise la formule des probabilités totales.

$$p(F_1 \cap F_2) = p(M \cap F_1 \cap F_2) + p(\overline{M} \cap F_1 \cap F_2)$$
$$= 0{,}3 \times 0{,}49 \times 1 + 0{,}7 \times 0{,}49 \times 0{,}49$$
$$= \boxed{0{,}31507}$$

c) on cherche $p(M \text{ sachant } F_1 \cap F_2) = p_{F_1 \cap F_2}(M)$

et on a $p_{F_1 \cap F_2}(M) = \dfrac{p(F_1 \cap F_2 \cap M)}{p(F_1 \cap F_2)} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}49 \times 1}{0{,}31507}$

$$\approx \boxed{0{,}467}$$

Exercice 3

1 a) il faut vérifier que $KC = 13$.

on a $KC = \sqrt{(4-0)^2+(-8-4)^2+(0-3)^2} = \sqrt{16+144+9}$

et on a bien $KC = \sqrt{169} = \boxed{13}$.

b) on peut montrer que $\vec{AC}\cdot\vec{BC} = 0$ soit $\vec{AC} \perp \vec{BC}$

on a $\vec{AC}\begin{pmatrix} 4-0=4 \\ -8-4=-12 \\ 0-16=-16 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC}\begin{pmatrix} 4-0=4 \\ -8-4=-12 \\ 0-(-10)=10 \end{pmatrix}$

et on a $\vec{AC}\cdot\vec{BC} = 4\times4+(-12)\times(-12)+(-16)\times10 = \boxed{0}$.

Donc $\vec{AC}\cdot\vec{BC}=0$. Donc $\vec{AC}\perp\vec{BC}$ → triangle rectangle en C.

2 a) on va montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs (non colinéaires) de (ABC).

on calcule $\vec{n}\cdot\vec{AC} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-12\\-16\end{pmatrix} = 3\times4+1\times(-12)+0\times(-16) = \boxed{0}$

et $\vec{n}\cdot\vec{BC} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-12\\10\end{pmatrix} = 3\times4+1\times(-12)+0\times10 = \boxed{0}$

Donc on a $\vec{n}\perp\vec{AC}$ et $\vec{n}\perp\vec{BC}$ → $\vec{n}$ est normal à (ABC).

b) Les coordonnées de $\vec{n}$ seront donc les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$.

On obtient $3\times x+1\times y+0\times z+d=0$

soit $3x+y+d=0$

<u>et</u> le point A appartient à (ABC) et ses coordonnées vont vérifier l'équation du plan.

On obtient $3\times\underset{x_A}{0}+\underset{y_A}{4}+d=0$ ↪ $d=-4$

et l'équation du plan (ABC) sera : $\boxed{3x+y-4=0}$

3 a) L'équation de la sphère sera :

$$(x-x_K)^2+(y-y_K)^2+(z-z_K)^2 = 13^2$$

soit $(x)^2+(y-4)^2+(z-3)^2 = 13^2$

<u>or</u> pour couper l'axe des abscisses, il faut $y=0$ et $z=0$.

On obtient $x^2+(0-4)^2+(0-3)^2 = 13^2$

soit $x^2 = 13^2-4^2-3^2 = 144$

On en déduit $x = -12$ ou $x = 12$ mais on cherche une abscisse positive donc on prendra $x = 12$.

b) La droite Δ sera dirigée par $\vec{n}$, vecteur normal à (ABC).

On aura $\Delta \begin{cases} x = \boxed{12} + k \times \boxed{3} \\ y = \boxed{0} + k \times \boxed{1} \\ z = \boxed{0} + k \times \boxed{0} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 12 + 3k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}$

point D vecteur directeur

c) pour calculer cette distance, il faut trouver les coordonnées du point d'intersection entre Δ et (ABC).

On "met" alors la droite dans le plan :

$$3 \times (12 + 3k) + k - 4 = 0 \rightarrow 10k + 32 = 0 \rightarrow k = -\frac{32}{10} = -\frac{16}{5}.$$

On obtient le point d'intersection $I \begin{pmatrix} x = 12 + 3 \times \left(-\frac{16}{5}\right) = \frac{12}{5} \\ y = -\frac{16}{5} \\ z = 0 \end{pmatrix}$

On en déduit $DI = \sqrt{\left(\frac{12}{5} - 12\right)^2 + \left(-\frac{16}{5} - 0\right)^2 + (0-0)^2} = \boxed{\frac{16\sqrt{10}}{5}}$

4) On prend ABC, triangle rectangle en C, comme base

$\rightarrow \text{Aire}_{ABC} = \frac{AC \times BC}{2}$ avec $AC = \sqrt{4^2 + (-12)^2 + (-16)^2} = 4\sqrt{26}$

et $BC = \sqrt{4^2 + (-12)^2 + 10^2} = 2\sqrt{65}$

on obtient $\text{Aire}_{ABC} = \frac{4\sqrt{26} \times 2\sqrt{65}}{2} = 52\sqrt{10}$

et la hauteur associée correspond ici à DI.

On a donc : $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times DI = \frac{1}{3} \times 52\sqrt{10} \times \frac{16\sqrt{10}}{5}$

soit $V_{ABCD} = \frac{1664}{3} \approx \boxed{555}$ u.v.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ Partie A

$\boxed{1}$ On peut, par exemple, développer $\rightarrow f(x) = 2x - 2x^2$

et on obtient $f'(x) = 2 - 4x$

et avec $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ on obtient $0 \geq -4x \geq -2$ $\quad -4 \times \frac{1}{2}$

soit $2 \geq 2 - 4x \geq 0$

Donc on a bien $f'(x) \geq 0$ et f croissante sur $[0 ; \frac{1}{2}]$.

$\boxed{2}$ On a $U_1 = 2U_0(1 - U_0) = 2 \times 0{,}3(1 - 0{,}3) = \boxed{0{,}42}$

Initialisation : on a $U_0 = 0{,}3$ et $U_1 = 0{,}42$

et donc au rang 0, on a bien $U_0 \leq U_1$.

Hérédité on suppose $U_n \leq U_{n+1}$

on applique la fonction f qui est croissante sur $[0 ; \frac{1}{2}]$

(on suppose $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$) et qui conserve l'ordre du coup.

on obtient $f(U_n) \leq f(U_{n+1})$

soit $U_{n+1} \leq U_{n+2}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{OK}}$

$\boxed{3}$ La suite (U_n) est donc croissante ($U_n \leq U_{n+1}$)

et majorée ($U_n \leq \frac{1}{2}$) $\rightarrow$ elle est donc convergente.

$\boxed{4}$ On a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec une fonction f continue.

La limite ℓ de la suite (U_n) vérifiera $f(\ell) = \ell$.

$\rightarrow$ on résout $f(\ell) = \ell$ soit $2\ell(1 - \ell) = \ell$

$\rightarrow 2\ell - 2\ell^2 = \ell$

$\rightarrow \ell - 2\ell^2 = 0 \rightarrow \ell(1 - 2\ell) = 0$

$\ell = 0$ (impossible ici) ou $\ell = \frac{1}{2}$

Bilan : la limite de (U_n) est bien égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B

$\boxed{1}$ a) avec $b=0$, on a $P_{n+1}-P_n = P_n \rightarrow P_{n+1} = 2P_n$

Donc (P_n) est une suite géométrique de raison 2 (et de premier terme $P_0 = 3$).

b) on en déduit $P_n = P_0 \times q^{(n-0)} = 3 \times 2^n$.

On a $2>1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \boxed{+\infty}$

$\boxed{2}$ a) avec $b=0,2$, on a $P_{n+1}-P_n = P_n(1-0,2P_n)$

soit $P_{n+1} = P_n + P_n - 0,2P_n^2 = 2P_n - 0,2P_n^2$

soit $P_{n+1} = 2P_n(1-0,1P_n)$.

on calcule maintenant $V_0 = 0,1\times P_0 = 0,1\times 3 = \boxed{0,3}$

et on a $V_{n+1} = 0,1\times P_{n+1}$

$= 0,1\times 2P_n(1-0,1P_n)$

$= 2\times \underbrace{0,1P_n}_{V_n}(1-\underbrace{0,1P_n}_{V_n}) = 2V_n(1-V_n)$.

$\rightarrow$ on a donc $V_0 = 0,3$ et $V_{n+1} = f(V_n)$ avec la fonction f de la partie A.

$\rightarrow$ la suite (V_n) correspond à la suite étudiée dans cette partie A $\rightarrow$ elle converge vers $\frac{1}{2}$.

---

or on a $V_n = 0,1\times P_n$

soit $P_n = 10\times V_n$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 10\times\frac{1}{2} = 5$.

La population se stabilisera autour de 5 (millions)

soit $\boxed{5000 \text{ individus}}$