# Bac Spé Maths 2023
# Voici la correction complète
# de l'épreuve 2
# pour la Nouvelle Calédonie
# Mardi 29 Aout 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

## Exercice 1

1) Les points C, F et K définissent si on montre, par exemple, que les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CK}$ ne sont pas colinéaires.

On a $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix} 0-1=-1 \\ 1-1=0 \\ 1-0=1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} 1-1=0 \\ 0{,}5-1=-0{,}5 \\ 1-0=1 \end{pmatrix}$

De façon évidente, les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires $\rightarrow$ C, F et K définissent bien un plan.

2) a) Les arêtes du cube ont une longueur égale à 1.

Donc $\boxed{KG = 0{,}5}$, $\boxed{GF = 1}$ et $\boxed{GC = 1}$

b) FGC est rectangle en G $\rightarrow$ $\text{Aire}_{FGC} = \dfrac{FG \times GC}{2} = \dfrac{1 \times 1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

c) FGC est la base du tétraèdre FGCK, associé à la hauteur GK $\rightarrow$ $\text{Volume}_{FGCK} = \dfrac{1}{3} \times \text{Aire}_{FGC} \times GK$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{12}}$

3) a) on va montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs, non colinéaires, du plan (CFK).

$\rightarrow$ on calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 1 = \boxed{0}$

et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CK} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 2 \times (-0{,}5) + 1 \times 1 = \boxed{0}$

$\rightarrow$ on a bien $\vec{n} \perp \overrightarrow{CF}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{CK}$ $\rightarrow$ $\vec{n}$ est normal à (CFK).

b) Les coordonnées de $\vec{n}$ représenteront les coefficients a, b et c de l'équation $ax + by + cz + d = 0$

$\rightarrow$ on obtient $1 \times x + 2 \times y + 1 \times z + d = 0$

soit $x + 2y + z + d = 0$

or le point C $\in$ (CFK) et ses coordonnées vérifient cette équation $\rightarrow$ $\underset{x_C}{1} + 2 \times \underset{y_C}{1} + \underset{z_C}{0} + d = 0$ $\rightarrow$ $3 + d = 0$

$\rightarrow$ $d = -3$

L'équation du plan (CFK) est : $\boxed{x + 2y + z - 3 = 0}$

4) un vecteur directeur de $\Delta$ sera $\vec{n}$.

on a donc $\Delta \begin{cases} x = \boxed{1} + \boxed{1} \times t \\ y = \boxed{1} + \boxed{2} \times t \\ z = \boxed{1} + \boxed{1} \times t \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

point G vecteur directeur

5) a) on "met" la représentation de $\Delta$ dans l'équation de (CFK).

on obtient $(1+t) + 2(1+2t) + (1+t) - 3 = 0$

soit $6t + 1 = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{6}$

et on obtient $L \begin{pmatrix} x = 1 + (-\frac{1}{6}) \\ y = 1 + 2 \times (-\frac{1}{6}) \\ z = 1 + (-\frac{1}{6}) \end{pmatrix}$ soit $L \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 4/6 \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

b) on a $LG = \sqrt{(x_G - x_L)^2 + (y_G - y_L)^2 + (z_G - z_L)^2}$

$= \sqrt{(1 - \frac{5}{6})^2 + (1 - \frac{4}{6})^2 + (1 - \frac{5}{6})^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

6) pour le tétraèdre FGCK, on va prendre maintenant le triangle FKC comme base, et la hauteur associée sera alors [LG].

On a donc : $\text{Volume}_{FGCK} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{FKC} \times LG$

$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{FKC} \times \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\hookrightarrow \text{Aire}_{FKC} = \frac{3\sqrt{6}}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{4}}$

## Exercice 2

1) on a $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ → on a $f(x) = xe^{-x} = x \times \frac{1}{e^x} = \frac{x}{e^x}$

et d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

→ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ → la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2) on a $f(x) = xe^{-x}$

→ $f'(x) = \underbrace{1 \times e^{-x}}_{u' \times v} + \underbrace{x \times (-e^{-x})}_{u \times v'} = \boxed{e^{-x}(1-x)}$

3) N'oublions pas que $e^{-x}$ est positif pour tout $x$ !

↳ on obtient

on a $f(0) = 0 \times e^{-0} = 0$

et $f(1) = 1 \times e^{-1} = e^{-1}$

$= \frac{1}{e}$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $e^{-x}$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $e^{-1} = \frac{1}{e}$ | ↘ | $0$ |

4) on a $e^{-1} \simeq 0,36788 > 0,367$

Donc le maximum $e^{-1}$ est supérieur à $\frac{367}{1000}$.

↳ l'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$ possède exactement deux solutions sur $[0 ; +\infty[$. On pourrait le démontrer en écrivant <u>deux fois</u> le corollaire du TVI : une fois sur $[0 ; 1]$ et une fois sur $[1 ; +\infty[$.

5) on obtient

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-x}$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | concave | | convexe | |

↳ la fonction $f$ est CONCAVE sur $[0;2]$ et CONVEXE sur $[2;+\infty[$ avec un point d'inflexion pour $x=2$.

6) a) pour $T_a$, on sait que :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

soit $y = (1-a)e^{-a}(x-a) + ae^{-a}$

$= (1-a)e^{-a} \times x - (1-a)e^{-a} \times a + ae^{-a}$

$= (1-a)e^{-a} \times x - \cancel{ae^{-a}} + a^2e^{-a} + \cancel{ae^{-a}}$

↳ on obtient $y = (1-a)e^{-a} \times x + a^2e^{-a}$.

b) Le point $H_a$ correspond à un point d'abscisse nulle de la tangente $T_a$ ↳ $g(a) = (1-a)e^{-a} \times 0 + a^2e^{-a}$

soit $g(a) = a^2e^{-a}$.

c) On a vu que le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ se situait au point d'abscisse $x=2$.

On va alors étudier les variations de $g(a)$

↳ on a $g(a) = a^2e^{-a}$

soit $g'(a) = \underbrace{2ae^{-a}}_{u' \times v} + \underbrace{a^2 \times (-e^{-a})}_{u \times v'}$

$= e^{-a}(2a - a^2) = e^{-a} \times a(2-a)$

↳ on obtient alors

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-a}$ | | $+$ | | $+$ | |
| $a$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2-a$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g'(a)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(a)$ | | ↗ | | ↘ | |

<u>Donc</u> le maximum de $g$ se trouve bien en $x=2$.

Comme le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ !!

## Exercice 3

1) on a $U_1 = \dfrac{-U_0 - 4}{U_0 + 3} = \dfrac{-0-4}{0+3} = \boxed{-\dfrac{4}{3}}$

et on a $U_2 = \dfrac{-U_1 - 4}{U_1 + 3} = \dfrac{-\left(-\frac{4}{3}\right) - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \boxed{-\dfrac{8}{5}}$

2) on aura

```
u = 0
for i in range(n):
    u = (-u-4)/(u+3)
```

3) on calcule $f'(x) = \dfrac{\overset{u'}{-1}\overset{v}{(x+3)} - \overset{u}{(-x-4)} \times \overset{v'}{1}}{\overset{v^2}{(x+3)^2}} = \dfrac{1}{(x+3)^2}$

↳ on a $f'(x) > 0$ sur $]-3;+\infty[$ donc $f$ est strict. croissante sur $]-3;+\infty[$

4) <u>Initialisation</u> : on a $U_0 = 0$ et $U_1 = -\dfrac{4}{3}$

Donc on a bien $-2 < U_1 \leq U_0$.

<u>Hérédité</u> on suppose que $-2 < U_{n+1} \leq U_n$

et on veut montrer que $-2 < U_{n+2} \leq U_{n+1}$

↳ on part de $-2 < U_{n+1} \leq U_n$

↳ on applique $f$ soit $f(-2) < f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$

$f$ est une fonction strictement croissante donc elle conserve l'ordre !

et on obtient $-2 < U_{n+2} \leq U_{n+1}$ CQFD !

$f(-2) = \dfrac{-(-2)-4}{-2+3} = -2$

5) on a, pour tout $n$, $U_{n+1} \leq U_n$ ↳ $(U_n)$ est décroissante

et $-2 < U_n$ ↳ $(U_n)$ est minorée (par $-2$)

Donc la suite $(U_n)$ est décroissante et minorée.

Donc la suite $(U_n)$ est convergente.

6) a) on a $V_0 = \frac{1}{U_0+2} = \frac{1}{0+2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) on calcule $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}+2} = \frac{1}{\frac{-U_n-4}{U_n+3}+2} = \frac{1}{\frac{-U_n-4+2(U_n+3)}{U_n+3}}$

soit $V_{n+1} = \frac{1}{\frac{U_n+2}{U_n+3}} = \frac{U_n+3}{U_n+2} = \frac{U_n+2+1}{U_n+2} = \frac{U_n+2}{U_n+2} + \frac{1}{U_n+2}$

$\hookrightarrow$ on obtient : $\boxed{V_{n+1} = 1 + V_n}$

Donc $(V_n)$ est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $V_0 = \frac{1}{2}$

c) on en déduit : $V_n = V_0 + (n-0) \times \text{raison}$

$= \frac{1}{2} + n \times 1 \quad \rightarrow V_n = n + \frac{1}{2}$

De plus, on sait $V_n = \frac{1}{U_n+2} \rightarrow \frac{1}{V_n} = U_n + 2$

On en déduit $U_n = \frac{1}{V_n} - 2 = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} - 2$

on $\boxed{U_n = \frac{1}{n+0,5} - 2}$

d) on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+0,5} = 0$

et par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{-2}$

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ Les réponses de ce QCM sont :

1 → B
2 → C
3 → D
4 → B
5 → D

Voici quelques explications même si ce n'est pas demandé.

<u>Question 1</u> : on cherche $p(F \text{ sachant } A)$

↳ on ne regarde que la colonne Avion et il y a 25 filles sur le total Avion de 75

Donc on a $p_A(F) = \frac{25}{75}$ → réponse $\boxed{B}$

<u>Question 2</u> : on a $p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F)$

$$= \frac{75}{200} + \frac{105}{200} - \frac{25}{200}$$

↳ on a donc $p(A \cup F) = \frac{155}{200} = \frac{31}{40}$ → réponse $\boxed{C}$

<u>Question 3</u>

⚠ pour les questions 3 et 4, on sait que les pannes de Bus et de Train sont <u>indépendantes</u>

→ cela signifie que $p(B \cap T) = p(B) \times p(T)$

pour la question 3, on cherche $p(B \cup T)$

↳ on a $p(B \cup T) = p(B) + p(T) - p(B \cap T)$

$$= b + t - b \times t$$ → réponse $\boxed{D}$

<u>Question 4</u>

On note $B$ l'évènement "le Bus est en panne" et donc $\overline{B}$ l'évènement "le Bus fonctionne".

Et pour qu'Albert puisse se rendre à son travail, il faut que le bus fonctionne <u>ou</u> que le train fonctionne soit $p(\overline{B} \cup \overline{T})$

on a alors $p(\overline{B} \cup \overline{T}) = p(\overline{B}) + p(\overline{T}) - p(\overline{B} \cap \overline{T})$

$$= p(\overline{B}) + p(\overline{T}) - p(\overline{B}) \times p(\overline{T})$$

$$= 1 - p(B) + 1 - p(T) - (1 - p(B))(1 - p(T))$$

soit $p(\overline{B} \cup \overline{T}) = 1 - b + 1 - t - (1-b)(1-t)$

$$= 1 - \cancel{b} + \cancel{1} - \cancel{t} - \cancel{1} + \cancel{b} + \cancel{t} - bt$$

$$= 1 - bt \longrightarrow \text{réponse } \boxed{B}$$

<u>Question 5</u> : on a ici une loi Binomiale avec $n$ épreuves et $p = p(\text{Face}) = x$.

↳ on cherche $p(X \geq 1)$

et on a $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$$= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^n$$

soit $p(X \geq 1) = 1 - (1-x)^n \longrightarrow$ réponse $\boxed{D}$