

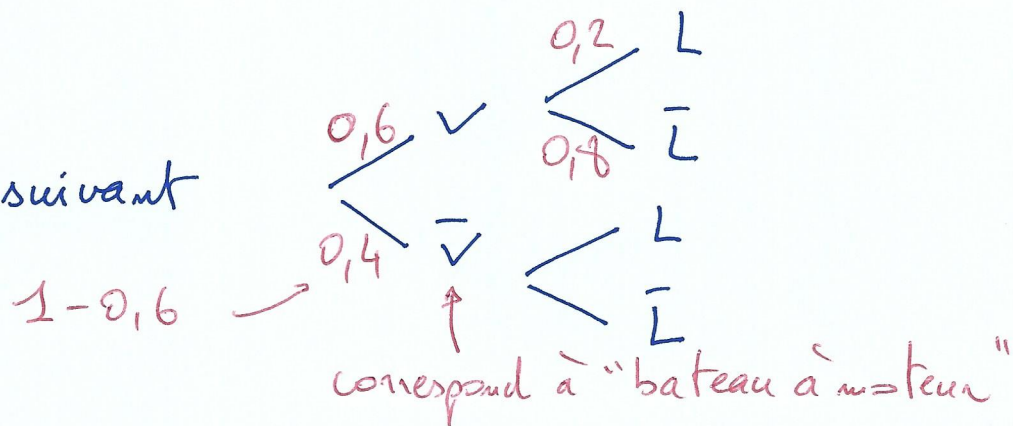
Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour la Nouvelle Calédonie
Lundi 28 Aout 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1) on a l'arbre suivant



2) on a $p(V \cap \bar{L}) = p(V) \times p_V(\bar{L}) = 0,6 \times 0,8 = \boxed{0,48}$

3) on cherche ici $p(\bar{V} \cap L)$ mais, pour le moment, l'arbre n'est pas complet.

$\hookrightarrow$ on utilise la formule des probabilités totales :

$$p(L) = p(L \cap V) + p(L \cap \bar{V})$$

avec $p(L) = 0,42$ (donnée par l'énoncé)

$$\text{et } p(L \cap V) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$$

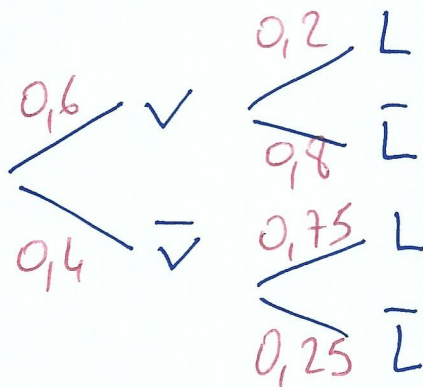
$$\text{On a donc : } 0,42 = 0,12 + p(L \cap \bar{V})$$

$$\text{soit } p(L \cap \bar{V}) = 0,42 - 0,12 = \boxed{0,30}$$

4) on calcule $p_{\bar{V}}(L) = \frac{p(\bar{V} \cap L)}{p(\bar{V})} = \frac{0,30}{0,4} = \boxed{0,75}$

5) on calcule $p_L(V) = \frac{p(V \cap L)}{p(L)} = \frac{0,12}{0,42} \approx \boxed{0,29}$

$\hookrightarrow$ l'arbre complet entièrement est donc :



Partie B

1) on a $P(L \cap A) = p(L) \times p_L(A) = 0,42 \times 0,005 = \boxed{0,0021}$

et $p(\bar{L} \cap A) = p(\bar{L}) \times p_{\bar{L}}(A) = 0,58 \times 0,12 = \boxed{0,0696}$

2) Avec la formule des probabilités totales, on a :

$$p(A) = p(L \cap A) + p(\bar{L} \cap A) \\ = 0,0021 + 0,0696 = \boxed{0,0717}$$

↳ cela correspond à 7,17% de "chances" d'avoir une avarie

soit 7,17 pour cent

ce qui donne 71,7 pour mille bateaux !!

Donc on peut s'attendre à $\boxed{72}$ avaries.

Partie C

1) Les paramètres n et p de la loi binomiale sont ici : $n = 40$ et $p = p(L) = 0,42$

2) on cherche $p(X \geq 15)$ et, suivant votre calculatrice, vous l'obtenez directement ou vous passez par $\boxed{1 - p(X \leq 14)}$.

↳ on a $p(X \geq 15) = 1 - p(X \leq 14) \approx \boxed{0,768}$

Exercice 2

1) a) on a $U_1 = 5 \times U_0 - 4 \times 0 - 3$
 $= 5 \times 3 - 0 - 3 = \boxed{12}$

b) on a $U_2 = 5 \times U_1 - 4 \times 1 - 3$
 $= 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 4 - 3 = \boxed{53}$

c) en utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, on peut dire que (U_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

2) a) Initialisation : on a $U_0 = 3$

et donc on a bien $\boxed{U_0 \geq 0 + 1}$!!

Hérédité : on suppose $U_n \geq n + 1$

et on veut montrer $U_{n+1} \geq (n+1) + 1$ soit $U_{n+1} \geq n+2$

on part alors de $U_n \geq n+1$

et on obtient $5U_n \geq 5(n+1)$

$$\text{soit } 5U_n - 4n - 3 \geq \underbrace{5(n+1) - 4n - 3}_{5n+5-4n-3} \\ = n+2$$

Donc on obtient bien

$$\boxed{U_{n+1} \geq n+2}$$

b) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$ et on a $U_n \geq n+1$.

Avec le théorème de comparaison, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \boxed{+\infty}$

3) a) on sait que $U_{n+1} = 5U_n - 4n - 3$

et $V_n = U_n - n - 1$

on a donc $U_n = V_n + n + 1$

on part de $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1) - 1$

$$= 5U_n - 4n - 3 - (n+1) - 1$$

$$= 5(V_n + n + 1) - 4n - 3 - (n+1) - 1$$

$$= 5V_n + \underbrace{5n+5-4n-3-n-1-1}_{= 5n-4n-n+5-3-1-1}$$

$$= 0$$

on a donc $V_{n+1} = 5V_n$

↳ (V_n) est une suite géométrique de raison $\boxed{5}$

et de premier terme $V_0 = U_0 - 0 - 1 = 3 - 0 - 1 = \boxed{2}$

b) Avec la formule des suites géométriques, on obtient :

$$V_n = V_0 \times q^{(n-0)} \rightarrow \boxed{V_n = 2 \times 5^n}$$

c) on en déduit $U_n = V_n + n + 1 \rightarrow \boxed{U_n = 2 \times 5^n + n + 1}$

d) on revient ici à la méthode de base en calculant $U_{n+1} - U_n$.

↳ on obtient $U_{n+1} - U_n$

$$= 2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1 - (2 \times 5^n + n + 1)$$

$$= \underbrace{2 \times 5^{n+1} - 2 \times 5^n}_{= 2 \times 5^n (5-1)} + \underbrace{n+1+1-n-1}_{= 1}$$

$$= 2 \times 5^n (5-1) + 1 = 2 \times 5^n \times 4 + 1$$

↑ c'est positif
pour tout n !

on a donc $U_{n+1} - U_n > 0 \rightarrow (U_n)$ est donc croissante.

4) a) on obtient while $n < 10^{**7}$
 $n = 5 * n - 4 * n - 3$

↑ puissance !

(ou $n = 2 * 5^{**n} + n + 1$)

b) on n'est pas obligé de programmer cet algorithme.

Un tableau de valeurs avec la suite (U_n) va suffire
et on obtient la valeur $\boxed{10}$

$$\text{car on a } U_9 = 3\,906\,260 < 10^7$$

$$\text{et } U_{10} = 19\,531\,261 > 10^7$$

Exercice 3 Les bonnes réponses de ce QCM sont:

$$1 \rightarrow A$$

$$2 \rightarrow A$$

$$3 \rightarrow B$$

$$4 \rightarrow C$$

$$5 \rightarrow D$$

et voici quelques explications même si ce n'est pas demandé.

Question 1 : on dérive $F(x)$ et on cherche laquelle va correspondre à $F'(x) = f(x)$

$$\rightarrow \text{avec } F(x) = 1 + xe^x$$

$$\text{on a } F'(x) = 0 + \underbrace{1 \times e^x}_{u \times v} + \underbrace{x \times e^x}_{u \times v'} = (x+1)e^x = f(x)$$

$\rightarrow$ réponse **A**

Question 2

on écrit les vecteurs directeurs des droites

$$\rightarrow \text{pour } (d_1) \text{ on a } \vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et pour } (d_2), \text{ on a } \vec{v}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (les abscisses sont opposées, les autres coordonnées sont égales).

Donc les droites ne sont ni parallèles ni confondues.

On cherche alors l'éventuel point d'intersection

$$\text{Donc on résout le système } \begin{cases} 2+t = 1-\Delta \\ 1+t = -1+\Delta \\ -t = 2-\Delta \end{cases}$$

$$\text{on obtient } \begin{cases} 2+(-2+\Delta) = 1-\Delta \\ 1+(-2+\Delta) = -1-\Delta \\ t = -2+\Delta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\Delta = 1 \\ -1 = -1 \\ t = -2+\Delta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta = \frac{1}{2} \\ -1 = -1 \\ t = -2 + \frac{1}{2} \\ = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Le système a donc bien une solution

Donc les droites sont sécantes $\rightarrow$ réponse **A**

Question 3

un vecteur normal au plan (P) sera $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et un vecteur directeur de la droite (Δ) sera $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 4

1) a) on a $\lim_{x \rightarrow 0} 5x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$.

De plus, avec les croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$

On en déduit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{0}$

b) on a ici une forme indéterminée

↳ on factorise par $x^2 \rightarrow f(x) = x^2 \left(5 + \frac{2}{x} - 2 \ln x \right)$

$$\begin{array}{c} \text{on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{2}{x} - 2 \ln x \right) \\ \text{avec } \frac{2}{x} \rightarrow 0 \text{ et } \ln x \rightarrow +\infty \\ \text{donc } 5 + 0 - (-\infty) = +\infty \end{array}$$

↳ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

2) on a $f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln x$

$$\text{soit } f'(x) = 5 \times 2x + 2 - \left(4x \ln x + 2x^2 \times \frac{1}{x} \right)$$

$$= 10x + 2 - 4x \ln x - 2x \quad \text{car } 2x^2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{x} = 2x$$

$$= \boxed{8x + 2 - 4x \ln x}$$

3) a) on obtient $f''(x) = 8 + 0 - \left(4 \ln x + 4x \times \frac{1}{x} \right)$

$$\hookrightarrow f''(x) = 8 - 4 \ln x - 4 = 4 - 4 \ln x = \boxed{4(1 - \ln x)}$$

b) La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes lorsque la fonction est convexe

↳ on résout alors $f''(x) \geq 0$ soit $1 - \ln x \geq 0$

$$\text{soit } \ln x \leq 1$$

$$\text{soit } x \leq e$$

Mais la fonction est définie sur $]0; +\infty[$

Donc l'intervalle cherché est $\boxed{]0; e]}$

c) Le tableau de variations de f' s'obtient avec le signe de sa dérivée f'' .

on obtient,

x	0	e	$+\infty$
signe de f''		+	0
variations de f'			

$\nearrow f'(e)$
2 $-\infty$

avec $f'(e) = 4e + 2$
(positif)

4) a) La fonction f' ne s'annule pas sur $]0; e]$.

Mais sur $[e; +\infty[$, la fonction f' est continue et strictement décroissante.

De plus, on a $f'(e) = 4e + 2 > 0 \rightarrow$ on a donc bien
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty < 0 \quad 0 \in]-\infty; 4e + 2[$

Donc, avec le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ a une unique solution sur $[e; +\infty[$ et donc sur $]0; +\infty[$.

Avec la calculatrice, on obtient $7,87 < \alpha < 7,88$

b) on en déduit le tableau :

seau :	x	0	α	$+\infty$	
signe de f'		$ $	$+$	0	$-$
variations de f		$ $	$\nearrow$	$\searrow$	

5) a) $f'(\alpha) = 0$ s'écrit $8\alpha + 2 - 4\alpha \ln \alpha = 0$

soit $4\alpha \ln \alpha = 8\alpha + 2$

soit $\ln \alpha = \frac{8\alpha + 2}{4\alpha} = \boxed{\frac{4\alpha + 1}{2\alpha}}$

et on obtient $f(\alpha) = 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \ln \alpha$
 $= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \times \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}$ (avec $\frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha$)

soit $f(\alpha) = 5\alpha^2 + 2\alpha - \alpha(4\alpha + 1)$
 $= 5\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - \alpha = \boxed{\alpha^2 + \alpha}$

b) Avec $7,87 < \alpha < 7,88$, on obtient :

$69,8069 < \alpha^2 + \alpha < 69,9744$

$\hookrightarrow f(\alpha)$ est compris entre 69,8 et 70,0 (au dixième près).

$\hookrightarrow$ on ne peut pas faire "mieux" ici !!

Fin