Bac Spé Maths 2023

Voici la correction complète

de l'épreuve 2

pour Centres Etrangers Madagascar

Mardi 14 Mars 2023

Correction proposée par

Bruno Swiners

sur

www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 Les bonnes réponses du QCM sont

1 → B
2 → D
3 → D
4 → C
5 → B

et voici quelques explications même si ce n'est pas demandé.

Question 1 → il faut dériver les primitives F et voir celle qui donne $F'(x) = f(x)$.

Avec un peu d'expérience, on commencerait par la réponse B et on vérifie :

$$F(x) = (x-1)e^{x}$$

$$\to \quad F'(x) = 1 \times e^{x} + (x-1) \times e^{x} = e^{x} \times (1 + x - 1)$$

$$= e^{x} \times x \to \boxed{B}$$

Question 2 → on va faire les tableaux de signes de f, de f' (avec les variations de f) et de f'' (avec la concavité de f) et on verra quelle réponse est cohérente.

avec la courbe →

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

avec les variations de f →

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
		f est croissante			

avec la concavité de f →

x	0		5		$+\infty$
$f''(x)$		f est concave	0	$+$	

Donc $f(x)$ et $f''(x)$ sont positives sur $]5;+\infty[$

$\to \boxed{D}$

Question 3 → on va tester chaque fonction g avec les valeurs de a et de b données.

et, avec $a = 6$ et $b = 2$, on a $g(t) = \dfrac{6}{2+e^{-t}}$

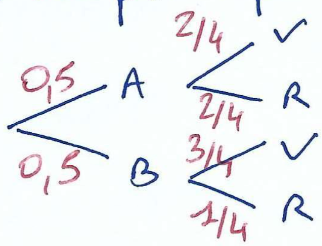
soit $g(0) = \dfrac{6}{2+e^{-0}} = \dfrac{6}{2+1} = \dfrac{6}{3} = 2$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{6}{2+e^{-t}} = \dfrac{6}{2} = 3$ → réponse $\boxed{D}$

e^{-t} → tend vers 0

Question 4 → on va faire l'arbre de probabilité en partant du principe que $p(A) = 0{,}5$ et $p(B) = 0{,}5$

on obtient :



et on cherche $p_V(B) = \dfrac{p(V \cap B)}{p(V)}$

avec $p(V \cap B) = 0{,}5 \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8}$

et $p(V)$ = probabilités totales $= 0{,}5 \times \dfrac{2}{4} + 0{,}5 \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{8}$

on obtient : $p_V(B) = \dfrac{3/8}{5/8} = \dfrac{3}{5}$ → réponse $\boxed{C}$

Question 5

Seul l'algorithme B fonctionne pour donner la somme souhaitée car :

- l'algorithme A calcule des termes mais il ne fait pas de somme !
- l'algorithme C initialise k et non pas S !!
- l'algorithme D possède une boucle qui dépend de k mais avec k qui n'est pas dans la boucle
  → ce programme ne s'arrêtera jamais

→ réponse $\boxed{B}$

Exercice 2

Partie A 1) on a $g(x) = \ln(2x+3) - 1 - x$

avec $\lim\limits_{x \to -1,5} (2x+3) = 0$ soit $\lim\limits_{x \to -1,5} \ln(2x+3) = -\infty$

→ on en déduit $\lim\limits_{x \to -1,5} g(x) = \boxed{-\infty}$

2) on a $g'(x) = \dfrac{\overset{u' \to}{2}}{\underset{u \to}{2x+3}} - 0 - 1 = \dfrac{2}{2x+3} - 1 = \dfrac{2-2x-3}{2x+3} = \dfrac{-2x-1}{2x+3}$

or on a $2x+3 > 0$ sur $]-1,5;+\infty[$ (g ne serait pas définie sinon)

Donc le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $-2x-1$

↳ on résout $-2x-1=0 \to x = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2} = -0,5$

et on obtient

x	$-1,5$		$-0,5$		$+\infty$
signe de $-2x-1$ et de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g	$-\infty$	↗	$g(-0,5) \simeq 0,19$	↘	$-\infty$

3) a) La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[-0,5;+\infty[$.

On a : $g(-0,5) \simeq 0,19$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ $\quad$ > et $0 \in]-\infty;0,19]$

Donc le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty; g(-0,5)]$ et d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x)=0$ a une solution unique dans l'intervalle $[-0,5;+\infty[$

b) Avec la calculatrice, on obtient : $\boxed{0,25 < \alpha < 0,26}$

Partie B 1) on considère que f est strictement croissante et on va faire son tableau de variations sur $[-1;\alpha]$

on obtient :

x	-1		α
$f(x)$			$f(\alpha) = \alpha$
		$\nearrow$	
	$f(-1) = -1$		

avec $f(-1) = \ln(2\times(-1)+3) - 1 = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - 1 = \boxed{-1}$

et $g(\alpha) = 0$ soit $f(\alpha) - \alpha = 0$ soit $f(\alpha) = \boxed{\alpha}$

et avec ce tableau, on a bien $f(x) \in [-1 ; \alpha]$
lorsque $x \in [-1 ; \alpha]$.

2 a) <u>Init</u> on a $U_0 = 0$ et $U_1 = f(U_0) = f(0) = \ln(3) - 1 \approx 0{,}1$

Donc on a bien $-1 \leq U_0 \leq U_1 \leq \alpha$ OK

<u>Hérédité</u>

on suppose $-1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \alpha$

et on applique la fonction f qui <u>conserve</u> l'ordre (car strictement croissante)

$\hookrightarrow$ on obtient $f(-1) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(\alpha)$

soit $-1 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \alpha$ CQFD !

b) (U_n) est <u>croissante</u> car $U_n \leq U_{n+1}$

et (U_n) est <u>majorée</u> car $U_n \leq \alpha$

Donc (U_n) est croissante et majorée

$\hookrightarrow$ c'est une suite convergente.

Exercice 3

1) a) on a $H\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$

b) on en déduit la droite (HM) avec $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}3-0=3\\0-2=-2\\1-2=-1\end{pmatrix}$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x = \underbrace{0}_{\text{point } H} + \underbrace{3}_{\text{vecteur } \overrightarrow{HM}} \times k \\ y = 2 + (-2) \times k \\ z = 2 + (-1) \times k \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 2-2k \\ z = 2-k \end{cases}$$

2) Le point P sera sur la face (BCF).

Donc on aura forcément $x_P = 2$.

Cela nous permet de déterminer k car $P \in (HM)$.

$\hookrightarrow$ on aura $x_P = 3k = 2 \hookrightarrow k = \frac{2}{3}$

et le point P aura pour coordonnées $\longrightarrow \begin{pmatrix} x=2 \\ y = 2-2\times\frac{2}{3} = 2/3 \\ z = 2 - \frac{2}{3} = 4/3 \end{pmatrix}$

3) a) on calcule $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}3-2=1\\0-2/3=-2/3\\1-4/3=-1/3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix}3-2=1\\1-2/3=1/3\\1-4/3=-1/3\end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ on aura $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN} = \begin{pmatrix}1\\-2/3\\-1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1/3\\-1/3\end{pmatrix} = 1\times1+\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$= 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$$

b) on calcule $PM = \sqrt{(3-2)^2+\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{3}}$

c) on connait $PN = \frac{\sqrt{11}}{3}$ et on va utiliser un raisonnement classique pour retrouver l'angle $\widehat{MPN}$.

On a : $\underbrace{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}}_{=\frac{8}{9}} = \underbrace{PM}_{=\frac{\sqrt{14}}{3}} \times \underbrace{PN}_{=\frac{\sqrt{11}}{3}} \times \cos(\widehat{MPN})$

donné par l'énoncé.

question ⓐ

question ⓑ

Donc on a $\frac{8}{9} = \frac{\sqrt{14}}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{3} \times \cos(\widehat{MPN})$

soit $\frac{8}{9} = \frac{\sqrt{154}}{9} \times \cos(\widehat{MPN})$

soit $\cos(\widehat{MPN}) = \frac{8}{9} : \frac{\sqrt{154}}{9} = \frac{8}{\sqrt{154}}$

On a donc : $\widehat{MPN} = \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{154}}\right) \simeq \boxed{49{,}9°}$

Donc on a bien $\widehat{MPN} < 55°$ → le toit peut être construit.

$\boxed{4}$ on a déjà la représentation paramétrique de (HM)

→ le plus simple paraît de chercher directement l'éventuel point d'intersection des 2 droites.

On calcule $\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix} 3-0=3 \\ 1-0=1 \\ 1-2=-1 \end{pmatrix}$

bien prendre un autre paramètre que k !

et on obtient donc (EN) → $\begin{cases} x = \boxed{0} + k' \times \boxed{3} = 3k' \\ y = \boxed{0} + k' \times \boxed{1} = k' \\ z = \boxed{2} + k' \times \boxed{(-1)} = 2-k' \end{cases}$

point E — vecteur $\overrightarrow{EN}$

On résout le système $\begin{cases} 3k = 3k' \to k = k' \\ 2-2k = k' \\ 2-k = 2-k' \end{cases}$

droite (HM) — droite (EN)

→ on a $k=k'$ → on remplace donc k' par k dans le système

On obtient $\begin{cases} k = k' \\ 2-2k = k \to k = 2/3 \\ 2-k = 2-k \to \boxed{OK} \end{cases}$

Donc ce système a bien une solution avec $k = k' = 2/3$

et on obtient le point de coordonnées (en utilisant par exemple (HM))

$\begin{pmatrix} x = 3 \times \frac{2}{3} = \boxed{2} \\ y = 2 - 2 \times \frac{2}{3} = \boxed{2/3} \\ z = 2 - \frac{2}{3} = \boxed{4/3} \end{pmatrix}$

on peut reconnaître le point P !!

Exercice 4

Avec une variable aléatoire X donnant le nombre de candidats qualifiés, la première phase correspond à une loi binomiale avec $n = 4$ et $p = 0,6$.

nombre de candidats   proba de se qualifier

condition 1 → on cherche $p(X \geq 2)$

et on a $p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) \simeq \boxed{0,821}$

→ on obtient donc environ 82,1% $\boxed{> 80\%}$

→ $\boxed{\text{la condition est vérifiée !}}$

condition 2 → il faut faire le tableau complet de la loi de probabilité.

durée (x_i)	0	0	5	9	11
probabilité (p_i)	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296
	$p(X=0)$	$p(X=1)$	$p(X=2)$	$p(X=3)$	$p(X=4)$

car 11 minutes correspond à 4 candidats qualifiés.

La durée moyenne correspond à :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} p_i x_i$$

soit $E(X) = 0 \times 0,0256 + 0 \times 0,1536 + 5 \times 0,3456 + 9 \times 0,3456 + 11 \times 0,1296$

et on obtient $E(X) = \boxed{6,264 \text{ min}} > 6 \text{ min}$.

→ $\boxed{\text{la condition n'est pas vérifiée !}}$