Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour Centres Etrangers Madagascar
Lundi 13 Mars 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ Les bonnes réponses du QCM sont :

1 → c

2 → b

3 → a

4 → d

5 → d

et voici quelques explications même si ce n'est pas demandé.

Question 1 → on a une forme indéterminée et il faut donc factoriser.

on a $\dfrac{1+2^n}{3+5^n} = \dfrac{2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{5^n\left(\frac{3}{5^n}+1\right)} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \left(\dfrac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{3}{5^n}+1}\right)$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty \to \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{5^n} = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ car on a $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$

Donc on a une limite du type $0 \times \left(\dfrac{0+1}{0+1}\right) \to \boxed{0} \to \boxed{c}$

Question 2 on a $f(x) = \underbrace{x^2}_{u} \times \underbrace{\ln x}_{v}$

$\to f'(x) = \underbrace{2x}_{u'} \times \underbrace{\ln x}_{v} + \underbrace{x^2}_{u} \times \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{v'} = 2x \ln x + \dfrac{x^2}{x}$

$\to f'(x) = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1) \to \boxed{b}$

Question 3 on sait que $H'(x) = h(x)$ sur $\mathbb{R}$

Donc le signe de h donnera les variations de H.

et de plus, on a $H(0) = 0$ car H s'annule en 0

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$H'(x)$ ou $h(x)$		$-$			0	$+$	
$H(x)$		↘	0	↘		↗	

c'est l'info $H(0) = 0$!

et on voit que H est bien positive sur $]-\infty ; 0]$
et c'est la seule réponse certaine → $\boxed{a}$

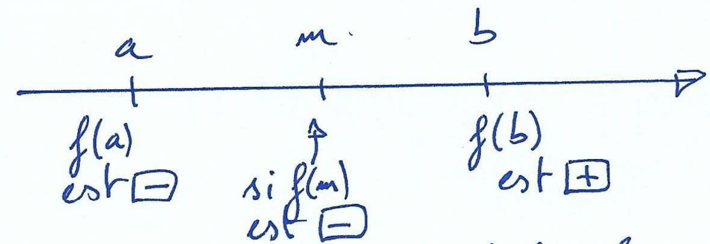
Question 4 → pour ce type d'algorithme, il faut que l'instruction "$m = (a+b)/2$" soit dans les boucles du "while"

→ on a le choix entre la réponse a) et d)

$\boxed{\text{or}}$ en lien avec le TVI, puisque f est croissante et s'annule sur $[a;b]$, on a forcément $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$

$\boxed{\text{Donc}}$ si $f(m) < 0$ alors la racine se trouve entre m et b et donc m prend la place de a !

→ schéma



alors m prend la place de a !

→ réponse $\boxed{d}$

Question 5

on a une loi binomiale avec $n = 3$ (tirages) et $p = p(\text{vert}) = \frac{3}{10}$

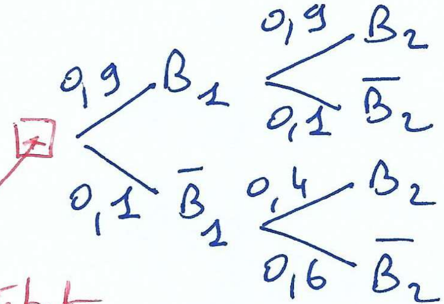
et on sait que $p(X=2) = \binom{3}{2} \times p^2 \times (1-p)^{3-2}$

soit $\binom{3}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)^1$ → $\boxed{d}$

$p = \frac{3}{10} \to 1 - p = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

Exercice 2 — Partie A

1) on a l'arbre suivant



on a $p_0 = 1$ donc on part d'une trotinette en bon état.

Donc $p_1 = p(B_1) = \boxed{0,9}$

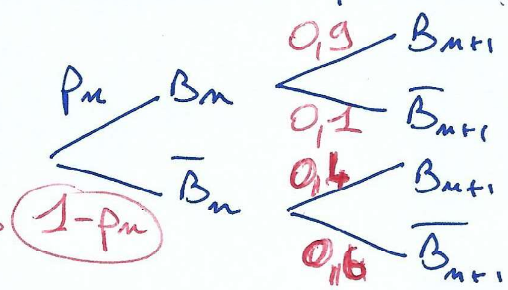
et, avec la formule des probabilités totales, on a

$p_2 = p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p(\overline{B}_1 \cap B_2)$

$= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = \boxed{0,85}$

2) Les probabilités conditionnelles restent les mêmes que pour l'arbre de la question 1

↳ on obtient



résultat à bien retenir

3) on aplique la formule des probabilités totales

↳ on a $p_{n+1} = p(B_{n+1}) = p(B_n \cap B_{n+1}) + p(\overline{B}_n \cap B_{n+1})$

$= p_n \times 0,9 + (1-p_n) \times 0,4$

$= 0,9 p_n + 0,4 - 0,4 p_n$

↳ $\boxed{p_{n+1} = 0,5 p_n + 0,4}$

4) a) Init on a $p_0 = 1$ et donc on a bien $p_0 \geq 0,8$ $\boxed{\text{OK}}$

Hérédité on suppose $p_n \geq 0,8$

et on obtient $0,5 p_n \geq 0,4$ (en multipliant par 0,5)

puis $0,5 p_n + 0,4 \geq 0,8$ (en ajoutant 0,4)

soit $p_{n+1} \geq 0,8$ $\boxed{\text{OK}}$

b) Donc la probabilité d'avoir une trottinette en bon état (c'est p_n) sera toujours supérieure ou égale à 0,8 c'est à dire $\boxed{80\%}$.

4 a c'est un raisonnement ultra classique.

↳ on a $U_{n+1} = p_{n+1} - 0,8$

$= 0,5p_n + 0,4 - 0,8$

$= 0,5(U_n + 0,8) + 0,4 - 0,8$

$= 0,5U_n + \underbrace{0,5\times 0,8 + 0,4 - 0,8}_{0}$

on a $U_n = p_n - 0,8$ et donc $p_n = U_n + 0,8$

↳ on obtient $\boxed{U_{n+1} = 0,5U_n}$

→ suite géométrique de $\boxed{\text{raison } 0,5}$ et $U_0 = p_0 - 0,8 = \boxed{0,2}$ ($1-0,8$)

b on a donc $U_n = U_0 \times q^{(n-0)}$ → $\boxed{U_n = 0,2\times 0,5^n}$

et donc $p_n = U_n + 0,8 = \boxed{0,2\times 0,5^n + 0,8}$

c on a $-1 < 0,5 < 1$ ↳ $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \boxed{0,8}$

Partie B 1 on a des épreuves indépendantes se déroulant dans conditions identiques avec 2 issues possibles

↳ on a une loi binomiale avec $\boxed{n = 15}$ et $\boxed{p = p(\text{bon état}) = 0,8}$

2 on a $p(X = 15) = \binom{15}{15}\times p^{15}\times(1-p)^{15-15}$

$= 1\times 0,8^{15}\times \underbrace{0,2^0}_{=1} \simeq \boxed{0,0352}$

ou directement avec la calculatrice !!

3 on cherche $p(X \geq 10)$

qui est égal à $1 - p(X \leq 9)$ → ces 2 écritures sont égales mais certaines calculatrices ne calculent pas $p(X\geq 10)$ et il faut utiliser $1 - p(X\leq 9)$.

→ on a $p(X\geq 10) \simeq \boxed{0,9389}$

4 pour rappel, on a $E(X) = n\times p = 15\times 0,8 = 12$

↳ en moyenne, il y aura 12 tastrimètres en bon état dans un lot de 15.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

$\boxed{1}$ Avec le repère proposé, on a $E\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Donc on a I milieu de [EF] $\rightarrow \begin{pmatrix}\frac{x_E+x_F}{2}\\ \frac{y_E+y_F}{2}\\ \frac{z_E+z_F}{2}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\frac{0+4}{2}\\ \frac{0+0}{2}\\ \frac{8+4}{2}\end{pmatrix} \rightarrow \boxed{I\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}}$

et on a $\boxed{J\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}}$ de façon assez évidente !

$\boxed{2}$ ⓐ on vérifie que $\vec{n}$ est $\perp$ à 2 vecteurs $\vec{IG}$ et $\vec{IJ}$ du plan (IGJ) (ces 2 vecteurs étant non colinéaires !)

$\rightarrow$ on a $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{IG}\begin{pmatrix}4-2\\4-0\\4-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} = -1\times 2+1\times 4+1\times(-2)$
$= \boxed{0} \rightarrow \boxed{\vec{n}\perp\vec{IG}}$

point G

et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{IJ}\begin{pmatrix}0-2\\0-0\\4-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix} = -1\times(-2)+1\times 0+1\times(-2)$
$= \boxed{0} \rightarrow \boxed{\vec{n}\perp\vec{IJ}}$

$\boxed{b}$ Les coordonnées de $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ seront donc les nombres a, b et c de l'équation $ax+by+cz+d=0$

$\hookrightarrow$ on obtient $-1x+1y+1z+d=0$
soit $-x+y+z+d=0$

or $I\in(IGJ)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan $\rightarrow \underset{x_I}{-2}+\underset{y_I}{0}+\underset{z_I}{6}+d=0 \rightarrow 4+d=0 \rightarrow d=-4$

$\rightarrow$ on obtient pour (IGJ) : $\boxed{-x+y+z-4=0}$

$\boxed{3}$ $\vec{n}$ va donc être un vecteur directeur de d

Donc on obtient $\begin{cases} x = 0 + (-1)\times k\\ y = 4 + 1\times k\\ z = 8 + 1\times k\end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-k\\ y=4+k\\ z=8+k\end{cases}$

point H $\quad \vec{n}$

$\boxed{4}$ Le point L est en fait le point d'intersection de la droite d et du plan (IGJ)

$\hookrightarrow$ on "met" la droite dans l'équation du plan

$\hookrightarrow -(-k)+(4+k)+(8+k)-4=0$

soit $3k + 8 = 0 \rightsquigarrow k = -8/3$

et on obtient donc $L \begin{pmatrix} x = -8/3 \\ y = 4 + (-8/3) = 4/3 \\ z = 8 + (-8/3) = 16/3 \end{pmatrix}$

5 La distance cherchée est égale à HL.

$\rightsquigarrow$ on a $HL = \sqrt{\left(-8/3 - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{16}{3} - 8\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{3}} = \boxed{\frac{8}{\sqrt{3}}}$

6 On nous indique "rectangle en I" $\rightsquigarrow$ on doit donc montrer que $\vec{IG} \perp \vec{IJ}$ soit $\vec{IG} \cdot \vec{IJ} = 0$

$\rightsquigarrow$ on calcule $\vec{IG}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{IJ}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\times(-2) + 4\times 0 + (-2)\times(-2)$
$= \boxed{0}$ OK

7 on va prendre le triangle IGJ comme base et la hauteur associée sera [HL].

et donc : $\text{Volume}_{IGJH} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{IGJ} \times HL$

et on a $\text{Aire}_{IGJ} = \frac{IG \times IJ}{2}$ (triangle rectangle en I)

avec $IG = \sqrt{(4-2)^2 + (4-0)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{24}$

et $IJ = \sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{8}$

On en déduit :

$$\text{Volume}_{IGJH} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{24} \times \sqrt{8}}{2} \times \frac{8}{\sqrt{3}}$$
$$= \boxed{\frac{32}{3}}$$

Exercice 4

AFFIRMATION 1 → on s'intéresse aux variations de f.

→ on calcule $f'(t)$ → attention, e^3 est un nombre et, par dérivation, on obtient 0 !

On a $f(t) = e^3 - e^{\overbrace{-0,5t^2+t+2}^{u}}$

soit $f'(t) = 0 - (\underbrace{-0,5\times 2t+1}_{u'})e^{-0,5t^2+t+2}$

→ $f'(t) = -(-t+1)e^{-0,5t^2+t+2} = (t-1)e^{-0,5t^2+t+2}$

or $f'(t)$ sera du signe $(t-1)$ car $e^{-0,5t^2+t+2} > 0$ pour tout t.

On obtient :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

Donc, au début, la population diminue

→ affirmation $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 2

"À très long terme" → on cherche la limite en $+\infty$.

→ on a $-0,5t^2+t+2 = t^2\left(-0,5+\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)$ → tend vers $-\infty$ quand $t\to+\infty$.

$t^2 \to +\infty$; $\frac{1}{t} \to 0$; $\frac{2}{t^2} \to 0$; $\left(-0,5+\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)$ tend vers $-0,5$

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,5t^2+t+2} = 0$ (c'est une limite du type $e^{-\infty} \to 0$)

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = e^3 \approx 20,086$ (milliers d'entrées)

soit $20\,086 < 21\,000$.

Donc on ne dépassera pas 21 000

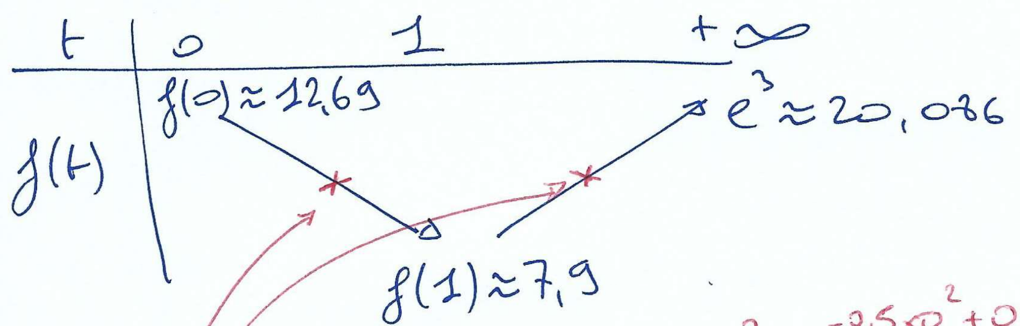
→ affirmation $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 3

On cherche à montrer que l'équation $f(t) = 10$ (en milliers d'entités) a exactement 2 solutions.

C'est une application du Théorème des Valeurs Intermédiaires.

On reprend le tableau de variations déjà vu, en le complétant :



$$f(0) = e^3 - e^{-0,5\times 0^2 + 0 + 2}$$
$$= e^3 - e^2 \approx 12,69$$

$$f(1) = e^3 - e^{-0,5\times 1^2 + 1 + 2}$$
$$= e^3 - e^{2,5} \approx 7,9$$

en appliquant deux fois le corollaire du TVI, on obtiendrait bien que l'équation $f(t) = 10$ a bien 2 solutions : une sur $[0 ; 1]$ et une sur $[1 ; +\infty[$.

↪ affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

Fin.