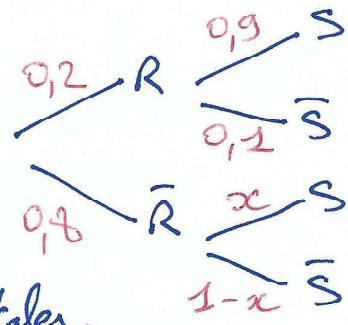


Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
pour La Réunion
Mercredi 29 Mars 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A : ① on a l'arbre suivant



② on sait que $P(S) = 0,82$

or, avec la formule des probabilités totales,

$$\text{on a: } P(S) = P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S)$$

$$\text{soit } 0,82 = 0,2 \times 0,9 + 0,8 \times x$$

$$\rightarrow \text{on résout l'équation} \rightarrow x = \frac{0,82 - 0,18}{0,8} = 0,75$$

③ on cherche $P_S(R) = \frac{P(S \cap R)}{P(S)} = \frac{0,2 \times 0,9}{0,82} \approx 0,22$

Partie B ① a) on aura $m = 5$ et $p = P(S) = 0,82$

b) on cherche $P(X \leq 3)$ et, avec la calculatrice,
on obtient $P(X \leq 3) \approx 0,222$

② a) on a $P(X=m) = \binom{m}{n} \times p^m \times (1-p)^{n-m}$
 $= \binom{m}{n} \times p^m \times (1-p)^0 = 0,82^m$

b) on résout $p_m < 0,01$ soit $0,82^m < 0,01$
 soit $\ln(0,82^m) < \ln(0,01)$

$$\text{soit } m \times \ln(0,82) < \ln(0,01)$$

$\ln(0,82)$ est négatif ! donc on inverse l'inégalité ! soit $m > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,82)}$ $\approx 23,2$

Dans le nombre m de clients doit dépasser 24 pour que la probabilité qu'ils soient tous satisfaits devienne inférieure à 0,01 soit 1%.

Exercice 2

$$\textcircled{1} \text{ on a } U_1 = \frac{6U_0 + 2}{U_0 + 5} = \frac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \boxed{\frac{50}{13}}$$

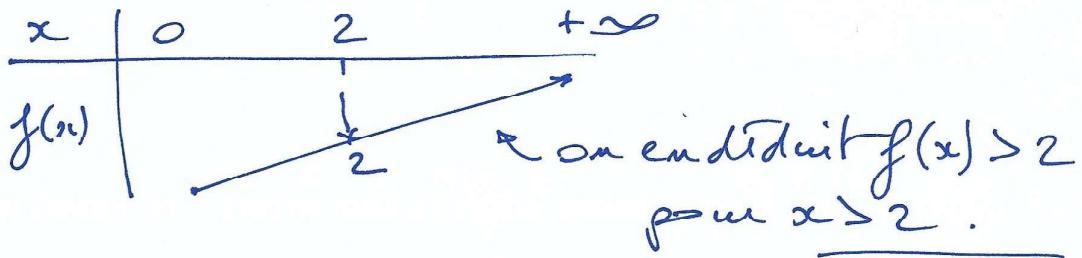
$$\textcircled{2} \text{ a) on calcule } f'(x) = \frac{6 \times (x+5) - (6x+2) \times 1}{(x+5)^2} = \frac{6x+30-6x-2}{(x+5)^2}$$

$\rightarrow f'(x) = \frac{28}{(x+5)^2}$ qui est strictement positif sur $[0; +\infty[$

Donc on a $f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[\rightarrow f \text{ est strictement croissante sur } [0; +\infty[$

$$\text{et on a } f(2) = \frac{6 \times 2 + 2}{2 + 5} = \frac{14}{7} = 2$$

On a donc le tableau de variations suivant :



b) Init on a $U_0 = 8 \rightarrow$ donc on a bien $U_0 > 2$ OK

Hérité on suppose $U_n > 2$

on applique f et on a $f(U_n) > f(2)$

(f conserve l'ordre car
f est strictement croissante)

(on a $f(2) = 2 !!$)

on obtient : $U_{n+1} > 2 \rightarrow$ OK

③ a) on sait que $U_n > 2$ donc on a $2 - U_n < 0$

et $U_n + 1 > 0$

et $U_n + 5 > 0$

et donc, par produit et quotient, on a :

$U_{n+1} - U_n < 0 \rightarrow (U_n)$ est décroissante

b) La suite (U_n) est donc décroissante et minorée

(par 2 car $U_n > 2$). Donc (U_n) est convergente.

$$\boxed{4} \textcircled{a} \text{ on a } V_0 = \frac{V_0 - 2}{V_0 + 1} = \frac{2 - 2}{2 + 1} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

\textcircled{b} on va ici utiliser la méthode habituelle qui est rendue forcément plus compliquée à cause du calcul fractionnaire.

\textcircled{c} on utilisera cette propriété $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{c}$.

on cherche notre 3^e formule en exprimant V_m en fonction de V_n

$$\rightarrow \text{on a } V_m = \frac{V_m - 2}{V_m + 1} \rightarrow V_m(V_m + 1) = V_m - 2 \rightarrow V_m^2 + V_m = V_m - 2$$

$$\text{soit } V_m(V_m - 1) = -2 - V_m \rightarrow V_m = \frac{-2 - V_m}{V_m - 1} = \boxed{\frac{2 + V_m}{1 - V_m}}$$

on part maintenant de V_{m+1} comme d'habitude.

$$V_{m+1} = \frac{V_{m+1} - 2}{V_{m+1} + 1} = \frac{\frac{6V_m + 2}{V_m + 5} - 2}{\frac{6V_m + 2}{V_m + 5} + 1} = \frac{\frac{6V_m + 2 - 2V_m - 10}{V_m + 5}}{\frac{6V_m + 2 + V_m + 5}{V_m + 5}} = \frac{4V_m - 8}{7V_m + 7}$$

$$\text{et on admet } V_{m+1} = \frac{4\left(\frac{2 + V_m}{1 - V_m}\right) - 8}{7\left(\frac{2 + V_m}{1 - V_m}\right) + 7} = \frac{\frac{8 + 4V_m - 8 + 8V_m}{1 - V_m}}{\frac{14 + 7V_m + 7 - 7V_m}{1 - V_m}} = \frac{12V_m}{21} = \boxed{\frac{12}{21}V_m}$$

\rightarrow suite géométrique de raison $\boxed{\frac{12}{21} = \frac{4}{7}}$

\textcircled{c} on admet $V_m = V_0 \times q^{(m-0)} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{7}\right)^m$

et, puisque $-1 < \frac{4}{7} < 1$, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^m = 0 \rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} V_m = \boxed{0}$

et avec $V_m = \frac{2 + V_m}{1 - V_m}$, on en déduit $\lim_{m \rightarrow +\infty} V_m = \frac{2}{1} = \boxed{2}$

\boxed{5} on obtient, avec la calculatrice, $\boxed{m = 14}$.

c'est le rang à partir duquel les termes de la suite (V_m) deviennent inférieurs à 2,001 (sachant que cette suite converge vers 2 !!).

Exercice 3

② on a (d) $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + k \times 0 \\ y = 1 + k \times 2 \\ z = 0 + k \times (-1) \end{array} \right.$ $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 + 2k \\ z = -k \end{array} \right.$

point A vecteur \vec{u}

② on "met" la droite dans l'équation du plan

$$\rightarrow 1 + 4(1 + 2k) + 2(-k) + 1 = 0$$

$$\rightarrow 1 + 4 + 8k - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow 6 + 6k = 0 \rightarrow k = -\frac{6}{6} = -1$$

on obtient donc un point d'intersection de coordonnées

B $(\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 + 2 \times (-1) = -1 \\ z = -(-1) = 1 \end{array})$

③ a) Vérifions que \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires car alors A, B et C ne sont pas alignés et donc ces trois points définissent un plan.

on a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1-1=0 \\ -1-1=-2 \\ 1-0=1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1-1=0 \\ -1-1=-2 \\ -1-0=-1 \end{pmatrix}$

et \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires (on a $\begin{matrix} 0=0 \\ -2=-2 \\ 1 \neq -1 \end{matrix}$)
mais

Donc (ABC) est bien un plan.

b) on vérifie que $\vec{n} \perp \vec{AB}$ et $\vec{n} \perp \vec{AC}$

on calcule $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times 1 = 0$

et $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times (-1) = 0$ (OK)

c) Le vecteur normal \vec{n} nous fournit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de l'équation cartésienne de (ABC)

on a alors $1 \times x + 0 \times y + 0 \times z + d = 0$

$\Leftrightarrow x + d = 0$

or A \in (ABC) et donc $1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

et on obtient pour (ABC) : $x - 1 = 0$

4 a) on calcule $AB = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$

et $AC = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5}$

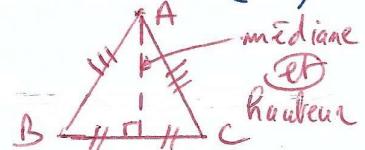
Donc on a bien $AB = AC \rightarrow$ triangle isocèle en A.

b) on calcule les coordonnées de H $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \\ y = \frac{y_B + y_C}{2} = -\frac{1+(-1)}{2} = -1 \\ z = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0 \end{array} \right.$

et donc $AH = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2 + (0-0)^2} = \boxed{\sqrt{4}} = \boxed{2}$

or, dans le triangle ABC isocèle en A, la médiane (AH) est également la hauteur issue de A.

On a : $\text{Aire}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2}$



avec $BC = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-(-1))^2 + (-1-1)^2} = \boxed{\sqrt{4}} = \boxed{2}$

Donc $\text{Aire}_{ABC} = \frac{2 \times 2}{2} = \boxed{2}$ u.a.

c) a) on a $\vec{BD} \left(\begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & -(-1) \\ 1 & 1 \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est colinéaire

avec le vecteur $\vec{n} \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$ \rightarrow on a même $\vec{BD} = -\vec{n}$

Donc on a bien $\vec{BD} \perp (ABC)$

et donc (BD) est bien une hauteur de la pyramide ABCD.

b) on prend le triangle ABC comme base de la pyramide et la hauteur correspondante est BD .

on a alors $\text{Volume}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times BD$

avec $BD = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-(-1))^2 + (1-1)^2} = \boxed{\sqrt{2}} = \boxed{1}$

D'où $\text{Volume}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \boxed{\frac{2}{3}}$ u.v.

Fin.

Exercice 4

Les réponses de ce QCM sont:

- 1 → C
- 2 → A
- 3 → B
- 4 → B
- 5 → C

et voici quelques explications même si ce n'est pas demandé.

Question 1 :

il faut dresser le tableau de variations de f

→ on a $f'(x) = \underbrace{2 \times e^x}_{u \times v} + \underbrace{2x \times e^x}_{u \times v'} = 2e^x(1+x)$

on obtient:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	↗	↗ $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x = 0$$

(croissance comparée)

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^x = +\infty$$

$$f(-1) = 2 \times (-1)e^{-1} = -2e^{-1} \approx -0,736$$

Puisque $f(-1) < -\frac{73}{100}$ (qui est égal à -0,73),
la fonction "passe" deux fois par $-\frac{73}{100}$ → C

Question 2

on a $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$

et en $-\infty$, ce n'est pas une forme indéterminée.

→ on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$

et, par quotient des limites, on obtient -∞ → A

Question 3

on va calculer $h''(x)$ avec $h(x) = (4x-16)e^{2x}$

→ on a $h'(x) = \underbrace{4 \times e^{2x}}_{u \times v} + (4x-16) \times \underbrace{2e^{2x}}_{u \times v'} = e^{2x}(4 + 2(4x-16))$

∴ $h'(x) = (8x-28)e^{2x}$

→ $h''(x) = \underbrace{8 \times e^{2x}}_{u \times v} + (8x-28) \times \underbrace{2e^{2x}}_{u \times v'} = e^{2x}(8 + 2(8x-28))$

∴ $h''(x) = (26x-48)e^{2x}$

on obtient:

x	- ∞	3	$+\infty$
$h''(x)$	-	0	+
$h(x)$	convexe		convexe

point d'inflexion en 3

→ [B]

Question 4

$$\text{on a } y = h'(e)(x-e) + h(e)$$

$$\text{avec } h(x) = 3\ln(x) - x \rightarrow h(e) = 3\ln(\underline{e}) - e = 3 - e$$

$$\text{et } h'(x) = 3 \times \frac{1}{x} - 1 \rightarrow h'(e) = \frac{3}{e} - 1 = \frac{3-e}{e}$$

$$\hookrightarrow \text{on obtient: } y = \frac{3-e}{e}(x-e) + 3 - e = \frac{3-e}{e}x - \frac{(3-e)e}{e} + 3 - e$$

$$\text{soit } y = \frac{3-e}{e}x \text{ (en simplifiant)} \rightarrow [B]$$

Question 5 on posera $x = \ln x$

$$\text{et on résout } x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$\rightarrow \text{on a } \Delta = 16 \text{ et 2 solutions } x_1 = -7$$

$$x_2 = -3$$

et donc on cherche x_1 tel que $x_1 = \ln x_1 = -7$

$$\hookrightarrow \text{on obtient } x_1 = [e^{-7}]$$

et on cherche x_2 tel que $x_2 = \ln x_2 = -3$

$$\hookrightarrow \text{on obtient } x_2 = [e^{-3}]$$

soit 2 solutions → [C]

$$\in]0; +\infty[$$