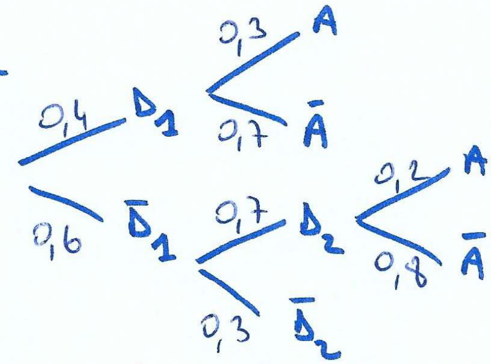
Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour La Réunion
Mardi 28 Mars 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A. 1 on a l'arbre suivant



2 on utilise la formule des probabilités totales

$\rightarrow p(A) = p(D_1 \cap A) + \underbrace{p(\bar{D}_1 \cap D_2 \cap A)}_{\text{il y a bien 3 événements successifs ici !}}$

$\rightarrow p(A) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = \boxed{0,204}$

3 on cherche $p_A(D_1) = \dfrac{p(A \cap D_1)}{p(A)} = \dfrac{0,4 \times 0,3}{0,204} \approx \boxed{0,588}$

Partie B 1 a) on a $\boxed{n = 30}$ et $\boxed{p = p(A) = 0,204}$

b) on obtient $p(X = 6) \approx \boxed{0,179}$

c) avec une loi binomiale, on sait que :

$E(X) = n \times p = 30 \times 0,204 = \boxed{6,12}$

et donc, sur un échantillon de 30 personnes, il y aura en moyenne 6,12 personnes qui achèteront le produit.

2 on cherche $\boxed{n}$ pour que $p(X \geq 1) \geq 0,99$

soit $1 - p(X = 0) \geq 0,99$

soit $1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^n \geq 0,99$

on obtient l'inéquation : $1 - 0,796^n \geq 0,99$

soit $0,796^n \leq 0,01$

soit $\ln(0,796)^n \leq \ln(0,01)$

soit $n \times \ln(0,796) \leq \ln(0,01)$

soit $n \geq \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \approx 20,18$

inversion car $\ln(0,796)$ est négatif

$\rightarrow$ et donc c'est à partir de $\boxed{21 \text{ personnes.}}$

Exercice 2

1) on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ (avec les croissances comparées)

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{3x}_{\to 0} + 1 - \underbrace{2x\ln x}_{\to 0} = 1 \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \boxed{1}$

et en $+\infty$, on factorise par x !

On a $f(x) = \underbrace{x}_{+\infty}\big(3 + \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{2\ln x}_{\to -\infty}\big)$

et on a : $+\infty \times (-\infty)$

Donc, par produit, on a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

2) a) on a $f(x) = 3x + 1 - 2x\ln x$

avec $(\underbrace{-2x}_{u}\times\underbrace{\ln x}_{v})' = \underbrace{-2}_{u'}\times\underbrace{\ln x}_{v} \underbrace{-2x}_{u}\times\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{v'} = -2\ln x - 2$

et on obtient $f'(x) = 3 - 2\ln x - 2 = \boxed{1 - 2\ln x}$

b) on résout $1 - 2\ln x = 0 \to \ln x = \frac{1}{2} \to x = e^{1/2}$

avec $1 - 2\ln x < 0$ si on a $x > e^{1/2}$

on obtient le tableau :

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$2e^{1/2}+1$	$\searrow$	$-\infty$

avec $f(e^{1/2}) = 3e^{1/2} + 1 - 2e^{1/2}\underbrace{\ln(e^{1/2})}_{= 1/2}$!!

$\to f(e^{1/2}) = 3e^{1/2} + 1 - e^{1/2} = 2e^{1/2} + 1$

c) sur $]0; e^{1/2}]$ l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution → le minimum de la fonction est 1 !!

sur $[e^{1/2}; +\infty[$, on applique le corollaire du TVI.

car la fonction est continue et décroissante sur $[e^{1/2}; +\infty[$.

et on a $f(e^{1/2}) = 2e^{1/2}+1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ → donc 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty\,; 2e^{1/2}+1]$.

et d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=0$ a une solution unique sur l'intervalle $[e^{1/2}\,; +\infty[$ et donc sur $[0\,; +\infty[$.

b) on indique α dans le tableau de variations

x	0		$e^{1/2}$		α		$+\infty$
$f(x)$	1	↗ $\boxed{+}$	$2e^{1/2}+1$	↘	0	↘ $\boxed{-}$	$-\infty$

et on en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$\boxed{4}$ on a $F' = f$ avec f positive sur $[e^{1/2}\,; \alpha]$
et f négative sur $[\alpha\,; +\infty[$

Donc on aura F croissante sur $[e^{1/2}\,; \alpha]$
et F décroissante sur $[\alpha\,; +\infty[$

Donc l'affirmation proposée ici est $\boxed{\text{FAUSSE}}$.

$\boxed{5}$ a) on calcule $f''(x)$ avec $f'(x) = 1 - 2\ln x$

$$\rightarrow f''(x) = 0 - 2 \times \frac{1}{x} = \boxed{-\frac{2}{x}}$$

Donc, sur $]0\,; +\infty[$, on a $f''(x) < 0$

et donc la fonction f est $\boxed{\text{CONCAVE}}$ sur $]0\,; +\infty[$.

et donc $\mathcal{C}_f$ se trouve $\boxed{\text{en-dessous}}$ de ses tangentes.

b) on aura pour T : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

avec $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \underbrace{\ln 1}_{=0} = \boxed{4}$

$f'(1) = 1 - 2 \times \underbrace{\ln 1}_{=0} = \boxed{1}$

→ on obtient : $y = 1(x-1) + 4 \rightarrow \boxed{y = x+3}$

c) $\mathcal{C}_f$ se trouvant en dessous de ses tangentes,

on aura : $f(x) \leq x+3 \rightarrow 3x+1-2x\ln x \leq x+3$

$\rightarrow 2x-2 \leq 2x\ln x$

on peut diviser par $2x$ sans changer l'inégalité car on a $\boxed{2x>0}$

$\rightarrow \boxed{1-\frac{1}{x} \leq \ln x}$ sur $]0;+\infty[$

Exercice 3

Partie A : Les réponses du QCM sont :

$1 \rightarrow A$

$2 \rightarrow B$

$3 \rightarrow D$

avec quelques explications même si ce n'est pas demandé.

Question 1

on a $U_1 = \frac{1}{2}\times U_0 + \frac{1}{2}\times 0 + 1 = \frac{1}{2}\times 3 + 1 = \frac{5}{2}$

et $U_2 = \frac{1}{2}\times U_1 + \frac{1}{2}\times 1 + 1 = \frac{1}{2}\times\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{11}{4}} \rightarrow \boxed{A}$

Question 2

on calcule $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1)$

$= \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}n + 1 - (n+1)$

$V_n = U_n - n$
donc $U_n = V_n + n$

$= \frac{1}{2}(V_n + n) + \frac{1}{2}n + 1 - (n+1)$

$= \frac{1}{2}V_n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1$

soit $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n \rightarrow$ suite géo de raison $\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{B}$

Question 3

U_{n+1} s'écrit en fonction de U_n et de n

$\rightarrow$ il faut donc que l'algorithme fasse ses calculs avec les variables U et i au "même niveau de rang" $\rightarrow$ c'est donc la réponse $\boxed{D}$.

Partie B

$\boxed{1}$ **Init** : on a $U_0 = 3$ donc on a bien $0 \leq U_0 \leq 0+3$

$\rightarrow \boxed{OK}$

Hérédité : on suppose $n \leq U_n \leq n+3$

et on veut prouver que $(n+1) \leq U_{n+1} \leq (n+1)+3$

soit $(n+1) \leq U_{n+1} \leq n+4$

$\rightarrow$ on part de : $n \leq U_n \leq n+3$

on obtient : $\frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}U_n \leq \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$ (en multipliant par $\frac{1}{2}$)

soit $\frac{1}{2}n + \underbrace{\frac{1}{2}n+1} \leq \frac{1}{2}U_n + \underbrace{\frac{1}{2}n+1} \leq \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}n+1}$

(en ajoutant $\frac{1}{2}n+1$ à chaque membre)

on obtient : $n+1 \leq U_{n+1} \leq n + \frac{5}{2}$ $(\leq n+4)$

$\rightarrow \boxed{OK}$

$\boxed{2}$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et on sait que $U_n \geq n$

et donc avec le théorème de $\boxed{\text{comparaison}}$,

on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{+\infty}$

$\boxed{3}$ on sait que $n \leq U_n \leq n+3$

soit $\frac{n}{n} \leq \frac{U_n}{n} \leq \frac{n+3}{n}$ (en divisant par n)

soit $1 \leq \frac{U_n}{n} \leq 1 + \frac{3}{n}$

et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right) = 1$

et donc avec le théorème des $\boxed{\text{gendarmes}}$,

on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{n} = \boxed{1}$

Exercice 4

1 on a $F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ⚠ L'origine est ici le point D !

2 M est le centre de BCGF et donc le milieu de [CF]

→ on obtient $M\begin{pmatrix}\frac{x_C+x_F}{2}\\ \frac{y_C+y_F}{2}\\ \frac{z_C+z_F}{2}\end{pmatrix} \to M\begin{pmatrix}\frac{0+1}{2}\\ \frac{1+1}{2}\\ \frac{0+1}{2}\end{pmatrix} \to M\begin{pmatrix}1/2\\ 1\\ 1/2\end{pmatrix}$

De même, N est le centre de EFGH et donc le milieu de [HF]

→ on obtient $N\begin{pmatrix}\frac{1+1}{2}\\ \frac{0+1}{2}\\ \frac{0+1}{2}\end{pmatrix} \to N\begin{pmatrix}1\\ 1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$

3 a) Montrons que $\vec{AG}$ est $\perp$ à $\vec{HF}$ et $\vec{HC}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (HFC).

on calcule $\vec{AG}\cdot\vec{HF} = \begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\to \vec{AG}\cdot\vec{HF} = 1\times 0 + 1\times 1 + (-1)\times 1 = \boxed{0} \to \boxed{OK}$

et $\vec{AG}\cdot\vec{HC} = \begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\to \vec{AG}\cdot\vec{HC} = 1\times(-1) + 1\times 1 + (-1)\times 0 = \boxed{0} \to \boxed{OK}$

b) $\vec{AG}$ est normal à (HFC) et donc les coordonnées de $\vec{AG}$ seront les nombres $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ de l'équation du plan.

On a $\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc on obtient $1x + 1y - 1z + d = 0$

soit $x + y - z + d = 0$

or le point $H \in (HFC)$ donc ses coordonnées vont vérifier l'équation de ce plan

$\to \underbrace{1}_{x_H} + \underbrace{0}_{y_H} - \underbrace{0}_{z_H} + d = 0 \to 1 + d = 0 \to d = -1$

on obtient donc : $\boxed{x + y - z - 1 = 0}$

4 on a (AG) $\begin{cases} x = \boxed{0} + k \times \boxed{1} \\ y = \boxed{0} + k \times \boxed{1} \\ z = \boxed{1} + k \times \boxed{(-1)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - k \end{cases}$

point A   vecteur $\overrightarrow{AG}$

5 Le point R correspond au point d'intersection entre la droite (AG) et le plan (HFC)

$\rightarrow$ on "met" la droite dans l'équation du plan

on obtient : $k + k - (1-k) - 1 = 0 \rightarrow 3k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{2}{3}$

et le point R aura pour coordonnées $\begin{cases} x = \boxed{2/3} \\ y = \boxed{2/3} \\ z = 1 - 2/3 = \boxed{1/3} \end{cases}$

6 on peut utiliser le produit scalaire car on veut un triangle rectangle $\underline{\underline{\text{en } K}}$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{KM} \perp \overrightarrow{KN}$

$\rightarrow \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KN} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 - 1 \\ 1 - 1 \\ 1/2 - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1/2 - 1 \\ 1/2 - t \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix} = 0$

on obtient donc : $-\frac{1}{2} \times 0 + 0 \times (-1/2) + (1/2 - t) \times (1/2 - t) = 0$

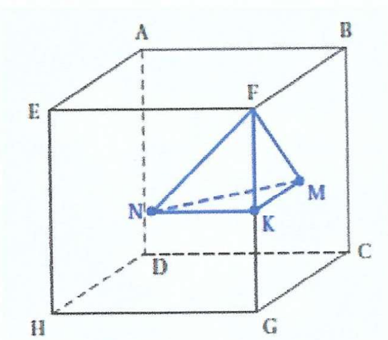
soit $(1/2 - t)^2 = 0 \rightarrow \boxed{t = 1/2}$

et on obtient alors le point $\boxed{K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$

7 . Le cube ABCDEFGH a pour volume $1 \times 1 \times 1 = \boxed{1}$ u.v.

. pour le tétraèdre FNKM,

on peut prendre KMN comme base et la hauteur associée sera alors [FK]



on a le dessin suivant qui nous permet de visualiser la base et la hauteur associée on calcule alors :

Aire d'un triangle rectangle

$$\text{Aire de la base } KNM = \frac{KN \times KM}{2} = \frac{1/2 \times 1/2}{2} = \boxed{1/8}$$

on peut considérer comme évident que $KN = 1/2$
et $KM = 1/2$

et $FK = 1/2$ (c'est également plutôt évident)

on obtient alors :

$$\text{Volume}_{FNKM} = \frac{1}{3} \times \text{Aire Base} \times \text{Hauteur associée}$$
$$= 1/3 \times 1/8 \times 1/2 = \boxed{1/48} \text{ U.V.}$$

et donc le volume du tétraèdre FNKM représente $1/48$ du volume du cube ABCDEFGH.

Fin.