Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
pour Amérique du Nord
Mardi 28 Mars 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A → c'est une lecture graphique → ne perdez pas trop de temps à vouloir faire des lectures parfaites car c'est parfois impossible !

1) La courbe représente f' et on veut les variations de f.
↳ il nous faut le $\boxed{\text{signe}}$ de cette fonction f'.

$\boxed{\text{Or}}$ f' semble être positive sur $]-\infty; 0,4]$, puis négative sur $[0,4; 2,6]$ et enfin positive sur $[2,6; +\infty[$

$\boxed{\text{Donc}}$ f serait croissante sur $]-\infty; 0,4]$ puis décroissante sur $[0,4; 2,6]$ et enfin croissante sur $[2,6; +\infty[$.

2) on s'intéresse à la convexité de f.
↳ il nous faut les variations de la fonction f'.

$\boxed{\text{Or}}$ f' semble être croissante sur $]-\infty; -1]$ et décroissante sur $[-1; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$.

$\boxed{\text{Donc}}$ f serait convexe sur $]-\infty; -1]$ et concave sur $[-1; 2]$ puis convexe sur $[2; +\infty[$.

Partie B

1) a) on a $x^2 - 3x + 1 = \underset{\to +\infty}{x^2}\underbrace{\left(1 - \underset{\to 0}{\frac{3}{x}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}\right)}_{\text{tend vers } 1}$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 3x + 1 = +\infty$
et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

et par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

b) on développe pour utiliser les croissances comparées
↳ $f(x) = \underbrace{x^2 e^x}_{\to 0} - \underbrace{3x e^x}_{\to 0} + \underbrace{e^x}_{\to 0}$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

avec les croissances comparées

↳ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{0}$

2) on a $f'(x) = \underbrace{(2x-5)}_{u'} \times \underbrace{e^x}_{v} + \underbrace{(x^2-5x+6)}_{u} \times \underbrace{e^x}_{v'}$

↳ $f'(x) = (2x-5+x^2-5x+6)e^x$ en factorisant par e^x

↳ $\boxed{f'(x) = (x^2-3x+1)e^x}$

3) on a $e^x > 0$ pour tout x

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de x^2-3x+1

↳ les racines de ce trinôme sont $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,38$

(on a $\Delta = 5$) et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,62$

on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

4) on aura $(T) : y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

avec $f'(0) = (0^2-3\times0+1)\underbrace{e^0}_{=1} = 1$

et $f(0) = (0^2-5\times0+6)e^0 = 6$

↳ on obtient alors $(T) : y = 1\times x + 6 \rightarrow \boxed{y = x+6}$

5) a) on fait le tableau de signes de $f''(x)$

→ on obtient

ce sont des fonctions affines !

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		−	0	+		+	
$x-2$		−		−	0	+	
e^x		+		+		+	
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		convexe		concave		convexe	

b) sur $[-1;2]$, f est donc concave → sa courbe se trouvera "en-dessous" de ses tangentes sur cet intervalle.

↳ avec $0 \in [-1;2]$, on a : $\mathcal{C}_f$ en dessous de (T)

soit $f(x) \leq x+6$.

Exercice 2

il faut se souvenir ici qu'une baisse de 15% correspond à un coefficient multiplicateur égal à $\left(1-\frac{15}{100}\right)=\boxed{0{,}85}$ et que la baisse de 10% correspond à $\left(1-\frac{10}{100}\right)=\boxed{0{,}9}$

$\boxed{1}$ en 2024, on aura :

pour le club A : $\underbrace{0{,}85\times 1700}_{\text{baisse de 15\%}}+\underbrace{0{,}1\times 1300}_{\text{arrivée du club B}}=\boxed{1575}$

pour le club B : $\underbrace{0{,}9\times 1300}_{\text{baisse de 10\%}}+\underbrace{0{,}15\times 1700}_{\text{arrivée du club A}}=\boxed{1425}$

$\boxed{2}$ En tenant compte du fait qu'aucun des 3000 sportifs ne sortent des 2 clubs A et B, on aura :

$\boxed{a_n+b_n=3000}$ pour tout n

$\boxed{3}$ En reprenant le raisonnement de la question 1,

on a : $a_{n+1}=0{,}85\times a_n+0{,}1\times b_n$

$=0{,}85a_n+0{,}1(3000-a_n)$ — $a_n+b_n=3000$ donc $b_n=3000-a_n$

$=0{,}85a_n+300-0{,}1a_n$

$\hookrightarrow \boxed{a_{n+1}=0{,}75a_n+300}$

$\boxed{4}$ a) <u>Init</u> on a $a_0=1700$ et $a_1=1575$

donc on a bien $1200\leq a_1\leq a_0\leq 1700$ $\boxed{\text{OK}}$

<u>Hérédité</u> on suppose $1200\leq a_{n+1}\leq a_n\leq 1700$

(on multiplie par 0,75) $\hookrightarrow 900\leq 0{,}75a_{n+1}\leq 0{,}75a_n\leq 1275$

(on ajoute 300) $\hookrightarrow 1200\leq 0{,}75a_{n+1}+300\leq 0{,}75a_n+300\leq 1575$

$\hookrightarrow 1200\leq a_{n+2}\leq a_{n+1}\leq 1575\ (\leq 1700)$ $\boxed{\text{OK}}$

b) (a_n) est une suite dé<u>croissante</u> (car $a_{n+1}\leq a_n$)

et <u>minorée</u> (car $a_n\geq 1200$) $\hookrightarrow \boxed{(a_n)\text{ converge}}$

$\boxed{5}$ a) c'est un raisonnement ultra classique.

$\hookrightarrow$ on a $V_{n+1}=a_{n+1}-1200$

$=0{,}75a_n+300-1200$

$= 0{,}75(V_n + 1200) + 300 - 1200$ on a $V_n = a_n - 1200$ donc $a_n = V_n + 1200$

$= 0{,}75\,V_n + \underbrace{0{,}75 \times 1200 + 300 - 1200}_{0}$

→ $\boxed{V_{n+1} = 0{,}75\,V_n}$ suite géométrique de raison 0,75
et de premier terme $V_0 = a_0 - 1200 = \boxed{500}$

b) on utilise la formule $V_n = V_0 \times q^{(n-0)} = \boxed{500 \times 0{,}75^n}$

c) on a donc $a_n = V_n + 1200 = \boxed{500 \times 0{,}75^n + 1200}$

6 a) on a $-1 < 0{,}75 < 1$ donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^n = 0$

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 500 \times 0{,}75^n = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1200}$

b) Donc, à long terme, le nombre de sportifs du club A s'approchera de 1200 (et donc 1800 pour le club B).
3000 − 1200.

7 a) on aura

```
def seuil():
    n = 0
    A = 1700
    while A >= 1280
        n = n+1
        A = 0,75*A + 300    ou A = 500*0,75**n + 1200
    return n
```

b) on cherche n à partir duquel $a_n < 1280$
mais rien n'oblige ici à résoudre l'inéquation.
Si nécessaire, cette résolution (ou le même type) est visible sur plein d'autres sujets.
Ici, on peut utiliser sa calculatrice et faire un tableau de valeurs → on obtient $U_6 \simeq 1289$
$U_7 \simeq 1266{,}7$

Donc on obtient la valeur 7 avec cet algorithme.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

$\boxed{1}$ a) on a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1-3=-4\\2-(-2)=4\\1-(-1)=2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}3-(-1)=4\\2-2=0\\-3-1=-4\end{pmatrix}$

b) Les vecteurs $\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car il n'y a pas de coefficient de proportionnalité entre ces vecteurs

<u>Donc</u> $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont pas colinéaires

<u>Donc</u> E, F et G ne sont pas alignés (ils forment donc le plan (EFG))

$\boxed{2}$ a) on a (FG) : $\begin{cases} x = \underbrace{-1}_{\text{point } F} + k\times \underbrace{4}_{\text{vecteur } \overrightarrow{FG}} = -1+4k \\ y = 2 + k\times 0 = 2 \\ z = 1 + k\times(-4) = 1-4k \end{cases}$

b) on doit vérifier que $H\in(FG)$ et que $\overrightarrow{EH}\perp\overrightarrow{FG}$

↳ on cherche k tel que $\underbrace{\begin{matrix}-1+4k\\2\\1-4k\end{matrix}}_{(FG)} = \underbrace{\begin{matrix}2\\2\\-2\end{matrix}}_{H}$ $\rightarrow k=\frac{3}{4} \rightarrow \boxed{H\in(FG)}$

et $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}2-3=-1\\2-(-2)=4\\-2-(-1)=-1\end{pmatrix}$ → on obtient $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

$= -1\times4+4\times0+(-1)\times(-4)$

$= -4+0+4 = 0 \rightarrow \boxed{\overrightarrow{EH}\perp\overrightarrow{FG}}$

↳ on a bien les conditions voulues.

c) (EH) représente une hauteur issue du point E

↳ on a $\text{Aire}_{EFG} = \frac{\text{Base}\times\text{Hauteur}}{2} = \frac{FG\times EH}{2}$

avec $FG = \sqrt{(3-(-1))^2+(2-2)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{32}$

et $EH = \sqrt{(2-3)^2+(2-(-2))^2+(-2-(-1))^2} = \sqrt{18}$

↳ on obtient $\text{Aire}_{EFG} = \frac{\sqrt{32}\times\sqrt{18}}{2} = \boxed{12}$ u.A.

$\boxed{3}$ a) on va montrer que $\vec{n}\perp\overrightarrow{EF}$ et que $\vec{n}\perp\overrightarrow{FG}$

↳ on a $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix} = 2\times(-4)+1\times4+2\times2 = \boxed{0} \rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{EF}$

et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix} = 2\times4+1\times0+2\times(-4) = \boxed{0} \rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{FG}$

<u>Donc</u> $\vec{n}$ est bien un vecteur normal au plan (EFG).

b) Les coordonnées de $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ seront donc les nombres a, b et c de l'équation $ax+by+cz+d=0$

↳ on obtient : $2x+1y+2z+d=0$ ↳ $2x+y+2z+d=0$

$\boxed{\text{or}}$ $E\in(EFG)$ donc on a $2\times \underset{x_E}{3}+(\underset{y_E}{-2})+2\times(\underset{z_E}{-1})+d=0$

soit $2+d=0$ ↳ $d=-2$

↳ on obtient donc pour (EFG) : $\boxed{2x+y+2z-2=0}$

c) La droite (d) est ⊥ à (EFG) et donc elle aura le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur directeur

on obtient (d) $\begin{cases} x = \boxed{3} + \boxed{2}\times k \\ y = \boxed{1} + \boxed{1}\times k \\ z = \boxed{5} + \boxed{2}\times k \end{cases}$ ↳ $\begin{cases} x = 3+2k \\ y = 1+k \\ z = 5+2k \end{cases}$

point D vecteur $\vec{n}$

d) K sera donc le point d'intersection de (d) et de (EFG)

↳ on "met" la droite (d) dans le plan (EFG)

↳ $2(3+2k)+1+k+2(5+2k)-2=0$

↳ $6+4k+1+k+10+4k-2=0$ ↳ $15+9k=0$

on obtient $k=-\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}$ et donc $\boxed{K}\begin{cases} x=3+2\times(-\frac{5}{3})=-1/3 \\ y=1+(-5/3)=-2/3 \\ z=5+2\times(-5/3)=5/3 \end{cases}$

$\boxed{4}$ a) on calcule

$DK=\sqrt{(-1/3-3)^2+(-2/3-1)^2+(\frac{5}{3}-5)^2}=\boxed{\sqrt{25}}=\boxed{5}$

b) si on prend EFG comme base du tétraèdre, la hauteur relative sera donnée par DK !!

On a donc : $\text{Volume}_{DEFG}=\frac{1}{3}\times \text{Aire de la base}\times\text{hauteur}$

$=\frac{1}{3}\times \text{Aire}_{EFG}\times DK$

$=\frac{1}{3}\times 12\times 5=\boxed{20}$ u.v.

Exercice 4 Les bonnes réponses de ce QCM sont :

1 → B
2 → C
3 → B
4 → D
5 → C

et voici quelques explications même si ce n'est pas demandé.

Question 1 → avec les croissances comparées, on sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Donc on factorise le dénominateur par x

↳ $f(x) = 0{,}05 - \frac{\ln x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$

tend vers 1 car $\frac{1}{x}$ tend vers 0

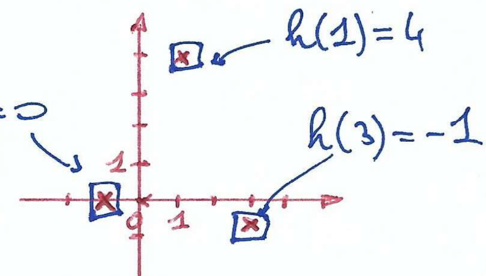
tend vers 0

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0{,}05$ → $\boxed{B}$

Question 2 → on peut faire un croquis avec les trois points correspondants à l'énoncé.

Donc h ne peut être croissante ou positive sur $[-1 ; 1]$.

Et il y aucune raison (on ne connait ses variations) qu'il y ait exactement deux solutions pour $h(x) = 1$.



La réponse $\boxed{C}$ est correcte et correspond à l'application du théorème des valeurs intermédiaires → $\boxed{C}$

Question 3 → avec $\frac{V_n}{U_n}$, on n'a ici pas de forme indéterminée car on a une limite du type $\frac{0}{+\infty}$ soit $\lim_{n \to +\infty} \frac{V_n}{U_n} = 0$

↳ $\boxed{B}$

Question 4 → il faut réaliser (un peu comme en 1ère) le tableau donnant la loi de probabilité de ce jeu puis calculer son espérance !

En comptant la mise de 4 €, le joueur peut gagner 8 € avec le 1 (soit 1 chance sur 6), perdre 1 € avec les pairs (soit 3 chances sur 6) ou perdre 4 € avec les autres possibilités (soit 2 chances sur 6).

On obtient :

gains (avec la mise)	8 €	−1 €	−4 €
probabilités	1/6	3/6	2/6

on calcule $E(X) = 8 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{3}{6} + (-4) \times \frac{2}{6}$

$= -0{,}5$ € → perte de 0,5 €

→ $\boxed{D}$

Question 5 → on a $p(X=0) = \underbrace{\binom{3}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^3$

soit $p(X=0) = (1-p)^3 = \frac{1}{125}$

$\boxed{\text{or}}$ on sait que $5^3 = 125$. Donc on a $\frac{1}{125} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

et donc $1-p = \frac{1}{5} \to p = \frac{4}{5}$ → $\boxed{C}$

Fin