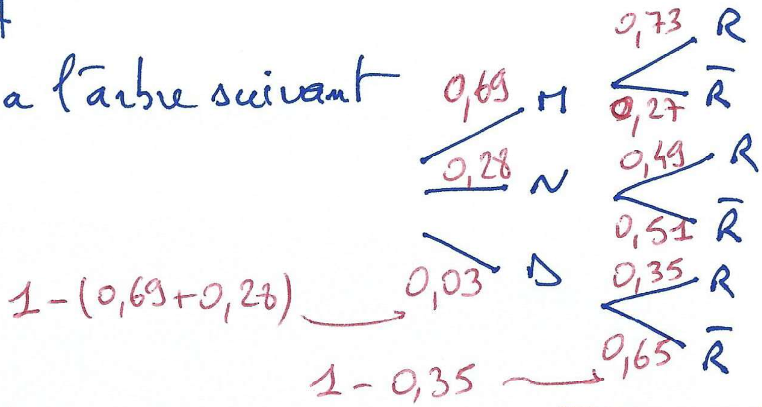
Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour Amérique du Nord
Lundi 27 Mars 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1) on a l'arbre suivant



2) on a $p(D \cap R) = p(D) \times p_D(R) = 0{,}03 \times 0{,}35 = \boxed{0{,}0105}$

3) on a $p(M \cap \overline{R}) = p(M) \times p_M(\overline{R}) = 0{,}69 \times 0{,}27 = \boxed{0{,}1863}$

↳ il y a 18,63% des déchets qui sont minéraux, non dangereux et non recyclables.

4) on utilise la formule des probabilités totales

↳ $p(R) = p(M \cap R) + p(N \cap R) + p(D \cap R)$

$= 0{,}69 \times 0{,}73 + 0{,}28 \times 0{,}49 + 0{,}03 \times 0{,}35$

$= \boxed{0{,}6514}$

5) on cherche $p_R(N) = \dfrac{p(N \cap R)}{p(R)} = \dfrac{0{,}28 \times 0{,}49}{0{,}6514} \simeq \boxed{0{,}2106}$

⚠ dix millièmes = 4 chiffres après la virgule

Partie B

1) a) on aura $n = 20$ et $p = p(R) = 0{,}6514$

b) Avec la calculatrice, on a $p(X = 14) \simeq \boxed{0{,}1723}$

2) a) on cherche $p(X=0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0}$

$\rightarrow p(X=0) = (1 - 0{,}6514)^n = \boxed{0{,}3486^n}$

b) on veut résoudre $p(X \geq 1) \geq 0{,}9999$

↳ $1 - p(X=0) \geq 0{,}9999$

on a $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

↳ $1 - 0{,}3486^n \geq 0{,}9999$

Donc on résout $0{,}3486^n \leq 0{,}0001$

soit $\ln 0{,}3486^n \leq \ln 0{,}0001$

soit $n \times \ln 0{,}3486 \leq \ln 0{,}0001$

soit $n \geq \dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}3486} \simeq 8{,}74$

inversion car $\ln 0{,}3486$ est négatif !

et donc à partir de 9 déchets.

Exercice 2

Partie A

1) a) on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ (car $2x$ tend aussi vers $-\infty$).

↳ on a une limite du type $3\times 0 - (-\infty) - 3$ → $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$

b) en $+\infty$, on aura une forme indéterminée

↳ on factorise par e^{2x}

↳ on obtient $g(x) = \underbrace{e^{2x}}_{+\infty}\left(3 - \underbrace{\frac{2x}{e^{2x}}}_{\text{tend vers } 0 \text{ par croissances comparées}} - \underbrace{\frac{3}{e^{2x}}}_{\text{tend vers } 0}\right)$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(3 - \frac{2x}{e^{2x}} - \frac{3}{e^{2x}}\right) = 3$ et, donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$

2) a) on a $g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$

→ $g'(x) = 3\times 2e^{2x} - 2 = \boxed{6e^{2x} - 2}$

b) on résout $6e^{2x} - 2 = 0$ ↳ $e^{2x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

→ $\ln e^{2x} = \ln \frac{1}{3}$ → $2x = \ln \frac{1}{3}$

soit $x = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$

on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)$		$+\infty$
$6e^{2x} - 2$ ou $g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

← on peut utiliser des valeurs tests !

$g\left(\frac{1}{2}\ln(1/3)\right) = 3e^{2\times\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - 2\times\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) - 3$

$= 3e^{\ln(1/3)} - \ln\left(\frac{1}{3}\right) - 3$

$= 3\times\frac{1}{3} + \ln 3 - 3$

$= 1 + \ln 3 - 3 = \boxed{\ln 3 - 2}$

⚠ on a $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 3$
$= -\ln 3$!!

3) a) on a $g(0) = 3e^{2\times 0} - 2\times 0 - 3$

$= 3e^{0} - 3 = 3\times 1 - 3 = \boxed{0}$ OK

3) On a $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) \simeq -0{,}55$ → cette première solution ($x=0$) se trouve donc dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) ; +\infty\right[$.

Pour la deuxième solution, on va donc travailler dans l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\ln(1/3)\right]$ et avec le TVI !!

En effet :

* g est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\ln(1/3)\right]$

* On a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$

et $g\left(\frac{1}{2}\ln(1/3)\right) = \ln 3 - 2 \simeq \boxed{-0{,}9}$

Donc le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $[\ln 3 - 2 ; +\infty[$ et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x)=0$ a bien une solution sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\ln(1/3)\right]$.

et avec la calculatrice, on a : $\boxed{-1{,}5 < \alpha < -1{,}4}$

4) On peut compléter le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		$\frac{1}{2}\ln(1/3)$		0		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\boxed{+}$	0	$\boxed{-}$	$\ln 3 - 2$		0	$\boxed{+}$	$+\infty$

et on en déduit le tableau de signes de g.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B

① on a $f(x) = e^{3x} - \underbrace{(2x+1)}_{u} \times \underbrace{e^{x}}_{v}$

$\rightarrow f'(x) = 3e^{3x} - \underbrace{2 \times e^{x}}_{u' \times v} - \underbrace{(2x+1)e^{x}}_{u \times v'}$

$= 3e^{3x} - 2e^{x} - 2xe^{x} - e^{x} = 3e^{3x} - 2xe^{x} - 3e^{x}$

$= e^{x}(3e^{2x} - 2x - 3)$

$= \boxed{e^{x} \times g(x)}$

② e^{x} étant toujours strictement positif, le signe de f' ne dépend que du signe de g que l'on connait avec la partie A.

on obtient :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

③ Pour que f soit convexe sur $\mathbb{R}$, il faudrait que f' soit croissante sur $\mathbb{R}$. Ce qui n'est pas possible sachant que $f'(x)$ passe de valeurs positives sur $]-\infty ; \alpha]$ à des valeurs négatives sur $[\alpha ; 0]$ $\rightarrow$ cela exclut la possibilité d'être croissante sur $\mathbb{R}$ pour la fonction f'.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ Les bonnes réponses de ce QCM sont :

1 → A
2 → C
3 → B
4 → D
5 → B

Voici quelques explications (même si ce n'est pas demandé) pour ce QCM $\boxed{\text{TRÈS}}$ calculatoire !!

<u>Question 1</u> : avec les réponses proposées, le plus simple est de calculer les 3 longueurs.

↳ $AB = \sqrt{(3-(-1))^2+(6-2)^2+(3-5)^2} = \sqrt{36} = \boxed{6}$

$AC = \sqrt{(3-(-1))^2+(0-2)^2+(9-5)^2} = \sqrt{36} = \boxed{6}$

$BC = \sqrt{(3-3)^2+(0-6)^2+(9-3)^2} = \boxed{\sqrt{72}}$

↳ on a $AB = AC$ → triangle isocèle en A
et $BC^2 = AB^2 + AC^2$ → triangle rectangle en A
→ réponse $\boxed{A}$

<u>Question 2</u> : le plus adapté est ici de vérifier l'appartenance de chaque point B, C et D au plan (BCD) avec l'équation proposée

↳ pour la a), on a $D \notin (BCD)$ car, en remplaçant, on a : $2\times 8+(-3)+(-8)-15=-10\neq 0$

↳ pour la b), on a $C \notin (BCD)$ car, en remplaçant, on a : $9\times 3-5\times 0+3=30\neq 0$

↳ pour la c), tout va bien car, en remplaçant,

on a, pour B → $4\times 3+6+3-21 \boxed{=0}$

pour C → $4\times 3+0+9-21 \boxed{=0}$

pour D → $4\times 8+(-3)+(-8)-21 \boxed{=0}$

↳ réponse $\boxed{C}$

Question 3 : il faut que les coordonnées du point H vérifient l'équation de (ABC) et que le vecteur $\overrightarrow{HD}$ soit colinéaire au vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ de (ABC).

et, avec la proposition b (on a H(3 ; 7 ; 2)), c'est bon !

En effet :

on a bien $3-2\times 7-2\times 2+15 \boxed{=0} \rightarrow H \in (ABC)$

et on a $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}8-3=5\\-3-7=-10\\-8-2=-10\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{HD} = 5\vec{n}$

$\rightarrow$ réponse $\boxed{B}$

Question 4 : Δ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ — les nombres "avec" le paramètre t

et on a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-3=0\\0-6=-6\\9-3=6\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les propositions a et b sont impossibles.

Il nous faut maintenant la représentation paramétrique de la droite (BC) $\hookrightarrow$

$$\begin{cases} x = \boxed{3} + \boxed{0}\times k = 3 \\ y = \boxed{6} + \boxed{-6}\times k = 6-6k \\ z = \boxed{3} + \boxed{6}\times k = 3+6k \end{cases}$$

point B   vecteur $\overrightarrow{BC}$

on cherche l'éventuel point d'intersection entre les droites (BC) et Δ

$\hookrightarrow$ on résout le système $\begin{cases} 3 = 5+t \rightarrow t=-2 \\ 6-6k = 3-t \\ 3+6k = -1+3t \end{cases}$

on obtient $\begin{cases} t=-2 \\ 6-6k = 3-(-2) \rightarrow 6-6k=5 \rightarrow k = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6} \\ 3+6k = -1+3\times(-2) \rightarrow 3+6k = -7 \quad k = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases}$

on remplace t par (−2)

<u>conclusion</u> : on ne peut avoir 2 valeurs différentes pour le paramètre k

Donc le système n'a pas de solution et les droites ne sont pas sécantes → réponse $\boxed{D}$

<u>Question 5</u>

Un vecteur normal de P est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

et un vecteur normal de (ABC) est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

↳ ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les plans ne sont pas parallèles et ils sont donc sécants.

et pour savoir si leur intersection est, par exemple, la droite (AB), il faut tester les coordonnées de A et de B dans l'équation du plan P (car il est évident que $A \in (ABC)$ et que $B \in (ABC)$).

↳ il se trouve que la proposition B est la bonne car on a bien :

$A \in P$ car $2\times(-1) - 2 + 2\times 5 - 6 \boxed{= 0}$

et $B \in P$ car $2\times 3 - 6 + 2\times 3 - 6 \boxed{= 0}$

↳ réponse $\boxed{B}$

Ouf !! <u>Que de calculs</u> !!!

Exercice 4

Partie A : ① on a $U_1 = \frac{1}{2}\left(U_0 + \frac{11}{U_0}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{11}{5}\right) = \boxed{\frac{18}{5}}$

et $U_2 = \frac{1}{2}\left(U_1 + \frac{11}{U_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{11}{\frac{18}{5}}\right) = \boxed{\frac{599}{180}}$

② on calcule $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{11}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 11}{x^2}\right)$

or $x^2 - 11 = 0$ a deux racines : $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$

mais, sur $]0;+\infty[$, on ne prendra que $\sqrt{11}$.

On obtient le tableau :

x	0		$\sqrt{11}$		$+\infty$
x^2-11		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

↳ la fonction f est bien croissante sur $[\sqrt{11};+\infty[$.

③ Init : on a $U_0 = 5$ et $U_1 = \frac{18}{5} = 3,6$

avec $\sqrt{11} \simeq 3,32$

Donc on a bien $\boxed{U_0 \geq U_1 \geq \sqrt{11}}$

Hérédité : on suppose $U_n \geq U_{n+1} \geq \sqrt{11}$

et on applique la fonction f qui est croissante sur $[\sqrt{11};+\infty[$ et qui donc CONSERVE l'ordre.

↳ on obtient $f(U_n) \geq f(U_{n+1}) \geq f(\sqrt{11})$

soit $U_{n+1} \geq U_{n+2} \geq f(\sqrt{11})$

avec $f(\sqrt{11}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \frac{11}{\sqrt{11}}\right) = \sqrt{11}$

et on a bien $\boxed{U_{n+1} \geq U_{n+2} \geq \sqrt{11}}$

4) (U_n) est une suite décroissante (car $U_n \geq U_{n+1}$) et minorée (car $U_n \geq \sqrt{11}$) $\rightarrow$ (U_n) est convergente.

5) on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f dérivable et donc continue sur $]0;+\infty[$ $\rightarrow$ la limite notée a sera solution de l'équation $a = f(a)$ soit $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{11}{a}\right)$

$\hookrightarrow$ on obtient : $2a = a + \frac{11}{a} \rightarrow a = \frac{11}{a} \rightarrow a^2 = 11$

soit $\boxed{a = \sqrt{11}}$ sur l'intervalle de convergence $[\sqrt{11};+\infty[$

Partie B 1) a) on a Aire $R_0 = l_0 \times L_0 = 11$

soit $l_0 \times 5 = 11 \rightarrow l_0 = \frac{11}{5} = \boxed{2,2}$

b) on a Aire $R_n = l_n \times L_n = 11 \rightarrow \boxed{l_n = \frac{11}{L_n}}$

2) on a $L_{n+1} = \frac{L_n + l_n}{2} = \frac{1}{2}(L_n + l_n) = \frac{1}{2}\left(L_n + \frac{11}{L_n}\right)$

$\hookrightarrow$ (L_n) correspond bien à (U_n).

3) on sait déjà que $U_n \geq \sqrt{11}$ soit $\boxed{L_n \geq \sqrt{11}}$

et, puisque $l_n = \frac{11}{L_n}$, on a $L_n \geq \sqrt{11}$

soit $\frac{1}{L_n} \leq \frac{1}{\sqrt{11}} \rightarrow \frac{11}{L_n} \leq \frac{11}{\sqrt{11}}$

$\rightarrow \boxed{l_n \leq \sqrt{11}}$

et donc on a bien $\boxed{l_n \leq \sqrt{11} \leq L_n}$

4) Le rectangle R_n va donc tendre vers une forme carré car sa largeur et sa longueur tendent vers le même nombre.

5) a) on obtient les valeurs l_3 et L_3 avec 6 décimales

soit $\boxed{l_3 \simeq 3,316606}$ et $\boxed{L_3 \simeq 3,316643}$

b) on obtient une valeur approchée de $\sqrt{11}$

car on a $l_3 \leq \sqrt{11} \leq L_3$

soit $\boxed{3,316606 \leq \sqrt{11} \leq 3,316643.}$