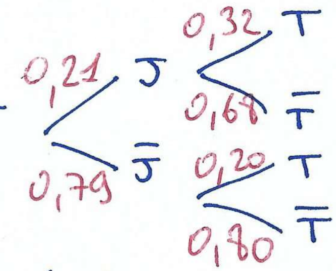
Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour la Polynésie
Lundi 13 Mars 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 Partie A

① on a l'arbre suivant



↳ on calcule $p(J \cap T) = p(J) \times p_J(T)$

$= 0{,}21 \times 0{,}32 = \boxed{0{,}0672}$

② on utilise la formule des probabilités totales

↳ $p(T) = p(J \cap T) + p(\overline{J} \cap T)$

$= 0{,}0672 + 0{,}79 \times 0{,}20 = \boxed{0{,}2252}$

③ on cherche $p_T(J) = \dfrac{p(T \cap J)}{p(T)} = \dfrac{0{,}0672}{0{,}2252} \approx \boxed{0{,}30}$

Partie B

[1] on assimile cette loi de probabilité à un tirage d'épreuves indépendantes et identiques, ayant 2 issues possibles

↳ on a une loi binomiale

de paramètres $n = 120$ et $p = 0{,}30$

c'est le 30% qui correspond à $p_T(J)$.

[2] on cherche $p(X \geq 50)$

et, suivant votre calculatrice, vous pouvez directement trouver $p(X \geq 50)$

ou il faut passer par $p(X \geq 50) = 1 - p(X \leq 49)$

↳ on obtient environ $\boxed{0{,}004}$

Exercice 2

① ⓐ on regarde les coefficients du paramètre k

↳ on obtient $\boxed{\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}$

ⓑ Les vecteurs directeurs $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, il n'y a pas de coefficient pour passer de l'un à l'autre → d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

ⓒ il nous faut la représentation paramétrique de d_1

↳ on obtient $\begin{cases} x = \boxed{2} + k' \times \boxed{1} \\ y = \boxed{3} + k' \times \boxed{(-1)} \\ z = \boxed{0} + k' \times \boxed{1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + k' \\ y = 3 - k' \\ z = k' \end{cases}$

point H   vecteur $\vec{u}$

attention de bien avoir deux lettres différentes k et k' pour les paramètres !

On résout le système entre d_1 et d_2

↳ $\begin{cases} 2 + k' = 2k - 3 \\ 3 - k' = k \end{cases}$ → on remplace k' par 5 → $2 + 5 = 2k - 3$; $3 - 5 = k$

$\boxed{k' = 5}$

et on obtient :

pour la 1ère, $10 = 2k$ soit $\boxed{k = 5}$

et pour la 2e, $-2 = k$ soit $\boxed{k = -2}$

Donc le paramètre k ne pouvant pas prendre deux valeurs différentes, le système n'a pas de solution et les droites ne sont pas sécantes.

ⓓ D'après le ⓑ et le ⓒ, d_1 et d_2 ne sont pas parallèles et pas sécantes

↳ d_1 et d_2 sont $\boxed{\text{non coplanaires}}$

② a) on calcule $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = -1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1$

$= -1 - 2 + 3 = \boxed{0}$

Donc $\boxed{\vec{w} \perp \vec{u}}$

et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = -1\times2 + 2\times1 + 3\times0 = \boxed{0}$

Donc $\boxed{\vec{w} \perp \vec{v}}$

b) on "met" la droite dans l'équation du plan P

↳ on a $5\times(2k-3) + 4\times(k) - 5 - 22 = 0$

soit $10k - 15 + 4k - 5 - 22 = 0$

soit $14k - 42 = 0$ ↳ $k = \frac{42}{14} = \boxed{3}$

↳ on obtient le point $\Omega\begin{pmatrix}x = 2\times3-3\\y = 3\\z = 5\end{pmatrix}$ ↳ $\boxed{\Omega\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}}$

[3] a) on a $\vec{w}$ (vecteur directeur de Δ) $\perp$ $\vec{u}$ (vecteur directeur de d_1) d'après le résultat de la question [2][a].

↳ on a donc $\Delta \perp d_1$ et il nous reste à montrer que ces deux droites sont sécantes.

↳ on résout le système $\begin{cases} 2+k = -t+3 \\ 3-k = 2t+3 \\ k = 3t+5 \end{cases}$

droite d_1 droite Δ

↳ on remplace k par $3t+5$

↳ on obtient $\begin{cases} 2+3t+5 = -t+3 \\ 3-3t-5 = 2t+3 \\ k = 3t+5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4t = -4 \\ -5t = 5 \\ k = 3t+5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ k = 3\times(-1)+5 \end{cases}$

↳ le système a bien une solution avec $t = -1$ et $k = 2$

et on obtient des droites perpendiculaires qui se coupent en le point $\begin{pmatrix}2+2\\3-2\\2\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$

on utilise par exemple d_1 avec $k = 2$

b) on vient de voir que Δ et d_1 sont perpendiculaires

<u>or</u> on sait déjà que $\vec{w} \perp \vec{v}$ (question [2][a])

soit $\Delta \perp d_2$

et le point Ω est le point d'intersection de Δ et d_2 (par définition de Δ qui passe par Ω et avec la question [2][b]) → Δ et d_2 sont perpendiculaires

Donc Δ répond bien au problème posé.

Exercice 3

AFFIRMATION 1 → on calcule $f'(x)$, puis $f''(x)$.

→ on a $f(x) = e^x - x$

soit $f'(x) = e^x - 1$

soit $f''(x) = e^x$ qui est strictement positif sur $\mathbb{R}$

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$

→ affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 2 → on a ici une équation produit nul

donc on résout $2e^x - 6 = 0$ et $e^x + 2 = 0$

soit $2e^x = 6$ et $e^x = -2$ impossible

→ $e^x = 3$

→ $x = \ln 3$

on obtient $S = \{\ln 3\}$ → affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 3 → on a ici une forme indéterminée et il faut donc factoriser.

$\frac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$

→ on a $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x - x} = \dfrac{e^{2x}\left(1 - 1/e^{2x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = \dfrac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}$

en $+\infty$, e^{2x} tend vers $+\infty$ donc $\frac{1}{e^{2x}}$ tend vers 0 et donc

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) = 1$

et $\frac{x}{e^x}$ tend vers 0 d'après les croissances comparées

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = 1$

→ on en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^x - x} = \boxed{+\infty}$ (du type $+\infty \times \frac{1}{1}$)

→ affirmation $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 4

on commence par vérifier la condition $F(0) = 5$

or on a $F(0) = (2\times 0 + 1)e^{3\times 0} + 4$

$= 1\times e^0 + 4 = 1 + 4 = \boxed{5} \to \boxed{\text{OK}}$

↳ on doit donc vérifier que $F'(x) = f(x)$.

↳ on a $F(x) = (\underbrace{2x+1}_{u} \times \underbrace{e^{3x}}_{v}) + 4$

$\to F'(x) = \underbrace{2}_{u'}\underbrace{e^{3x}}_{v} + (\underbrace{2x+1}_{u}) \times \underbrace{3e^{3x}}_{v'} + 0$ on a $(e^{3x})' = 3e^{3x}$

$= 2e^{3x} + 6xe^{3x} + 3e^{3x}$

$= e^{3x} \times (2 + 6x + 3) = e^{3x} \times (6x + 5) = f(x)$.

Donc on a bien $F'(x) = f(x)$ et F est bien une primitive de f → les 2 conditions sont bien remplies → affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 5

cette fonction va amener, à la fin, à diviser la somme des termes de la liste (cette somme est bien égale à 50) par la longueur de la liste (qui vaut 10)

Donc l'exécution de cette fonction renvoie $50/10 = \boxed{5}$

→ affirmation $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Exercice 4

1) a) <u>Init</u> on vérifie que $U_0 = -1$

<u>or</u> on a $U_0 = 2\times 0{,}9^0 - 3 = 2\times 1 - 3 = \boxed{-1}$ CQFD.

<u>Hérédité</u> on suppose que $U_n = 2\times 0{,}9^n - 3$

et on part de $U_{n+1} = 0{,}9\,U_n - 0{,}3$

$\to U_{n+1} = 0{,}9(2\times 0{,}9^n - 3) - 0{,}3$

bien ordonner le calcul comme cela pour faire apparaitre $0{,}9^{n+1}$ $\quad = \underbrace{2\times 0{,}9\times 0{,}9^n} - 0{,}9\times 3 - 0{,}3$

$\to U_{n+1} = \boxed{2\times 0{,}9^{n+1} - 3}$ CQFD.

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < 0{,}9^n \leq 1$

$\to 0 < 2\times 0{,}9^n \leq 2$ (en multipliant par 2)

$\to -3 < 2\times 0{,}9^n - 3 \leq -1$ (en retranchant 3)

soit $\boxed{-3 < U_n \leq -1}$

c) il y a plusieurs possibilités de raisonner ici !

↳ je propose $U_{n+1} - U_n = 2\times 0{,}9^{n+1} - 3 - (2\times 0{,}9^n - 3)$

$= 2\times 0{,}9^{n+1} - 2\times 0{,}9^n$

$= 2\times 0{,}9^n \times (0{,}9 - 1)$

$= 2\times 0{,}9^n \times (-0{,}1)$ qui est donc négatif pour tout n.

Donc on a $U_{n+1} - U_n < 0$ pour tout n

↳ (U_n) est donc décroissante.

d) (U_n) est donc une suite décroissante et minorée ($\text{car } U_n > -3$) donc (U_n) est $\boxed{\text{convergente}}$

on aurait pu conclure aussi avec l'expression $U_n = 2\times 0{,}9^n - 3$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}9)^n = 0$ (car $-1 < 0{,}9 < 1$)

et on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \boxed{-3}$

et donc suite convergente vers -3.

2) a) on a $g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$

soit $g'(x) = \dfrac{0,5}{0,5x+1,5} - 1$ avec $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

soit $g'(x) = \dfrac{0,5 - 0,5x - 1,5}{0,5x+1,5} = \dfrac{-0,5x-1}{0,5x+1,5}$ dénominateur forcément positif car il était dans la fonction ln !

↳ le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $-0,5x-1$.

↳ on résout $-0,5x-1=0$

soit $x = \dfrac{1}{-0,5} = -2$

et on obtient :

x	-3		-2		-1
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| $\boxed{-\infty}$	$\nearrow$	$g(-2)$	$\searrow$	$\boxed{1}$

signe de la fonction affine $-0,5x-1$

$\lim\limits_{x \to -3} (0,5x + 1,5) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -3} \ln(0,5x+1,5) = \boxed{-\infty}$

Donc $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = \boxed{-\infty}$

$g(-1) = \ln(0,5\times(-1)+1,5) - (-1)$
$= \underbrace{\ln(1)}_{=0} + 1 = \boxed{1}$

b) on a $g(-2) = \ln(0,5\times(-2)+1,5) - (-2) \approx \boxed{1,31}$

Donc l'équation $g(x) = 0$ ne peut avoir de solution sur $[-2\,;-1]$.

mais sur $]-3\,;-2]$, la fonction g est croissante et continue.

on a : $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = \boxed{-\infty}$

et $g(-2) \approx \boxed{1,31}$

→ 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty ; g(-2)]$ et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x)=0$ a une solution unique sur $]-3;-2]$ et donc sur $]-3;-1]$.

→ avec la calculatrice, on a : $\boxed{-2{,}889 < \alpha < -2{,}888}$

3) a) on a $V_n = \ln(0{,}5\,U_n + 1{,}5)$

$= \ln(0{,}5(2\times 0{,}9^n - 3) + 1{,}5)$

$= \ln(1\times 0{,}9^n - 1{,}5 + 1{,}5)$

$= \ln(0{,}9^n) = n \times \ln 0{,}9$.

→ on reconnait l'expression d'une suite arithmétique de raison $\ln 0{,}9$.

b) on a $g(U_n) = 0$ — il est plus simple de partir de $g(U_n)=0$ ici !!

ssi $\ln(0{,}5\,U_n + 1{,}5) - U_n = 0$

ssi $\ln(0{,}5\,U_n + 1{,}5) = U_n$

ssi $V_n = U_n$

c) ... question qui demande un peu de réflexion...

→ on cherche k tel que $U_k = \alpha$ — α est solution de $g(x)=0$

→ on aura donc $g(U_k) = g(\alpha) = 0$

→ et, d'après le b), on aura $U_k = V_k \; (= \alpha)$

or on sait que $V_n = n \times \ln 0{,}9$

Donc on résout $V_k = \alpha$ soit $k \times \ln 0{,}9 = \alpha \to k = \dfrac{\alpha}{\ln 0{,}9}$

or on a $-2{,}889 < \alpha < -2{,}888$

soit $\underbrace{\dfrac{-2{,}889}{\ln 0{,}9}}_{\approx 27{,}41} > \underbrace{\dfrac{\alpha}{\ln 0{,}9}}_{k} > \underbrace{\dfrac{-2{,}888}{\ln 0{,}9}}_{\approx 27{,}42}$ on a divisé par $\ln(0{,}9)$ qui est négatif !

et donc le rang k ne peut pas être un nombre entier car il sera (environ) compris entre 27,41 et 27,42.

d) Donc on ne peut pas trouver d'entier k tel que $U_k = \alpha$ et donc on ne peut pas avoir $g(U_k) = 0$ et donc, d'après le 3) b), on ne peut pas avoir de rang k tel que $U_k = V_k$.

Fin.