

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**SESSION 2023**

## MATHÉMATIQUES

**Jour 2**

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.  
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.  
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

**Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.**

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

**Exercice 1. (5 points)****Thèmes : probabilités, suites***Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.***Partie A**

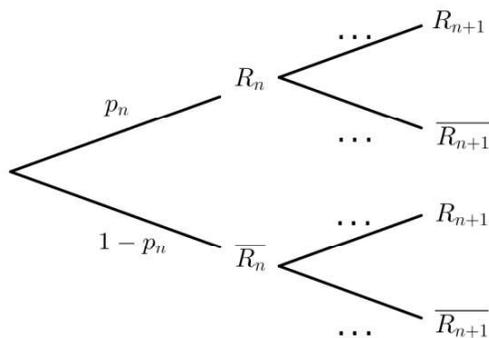
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente, que :

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel  $n$  :

- $R_n$  l'événement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la  $n$ -ième séance »,
- $p_n$  la probabilité de l'événement  $R_n$ . On considère que  $p_0 = 0,6$ .

1. Soit  $n$  un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$p_{n+1} = 0,6 p_n + 0,3.$$

3. On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_n = p_n - 0,75$ .

- a. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$ .
- c. En déduire que la suite  $(p_n)$  est convergente et déterminer sa limite  $\ell$ .
- d. Interpréter la valeur de  $\ell$  dans le cadre de l'exercice.

## Partie B

Après de nombreuses séances d'entraînement, l'entraîneur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.

On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies.

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par  $X$ .
2. Déterminer, à  $10^{-3}$  près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
3. Calculer  $P(X \geq 9)$ , à  $10^{-3}$  près.

**Exercice 2. (5 points)****Thème : Géométrie dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère :

- le point  $A(1; -1; -1)$ ;
- le plan  $\mathcal{P}_1$  d'équation :  $5x + 2y + 4z = 17$ ;
- le plan  $\mathcal{P}_2$  d'équation :  $10x + 14y + 3z = 19$ ;
- la droite  $\mathcal{D}$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbf{R}.$$

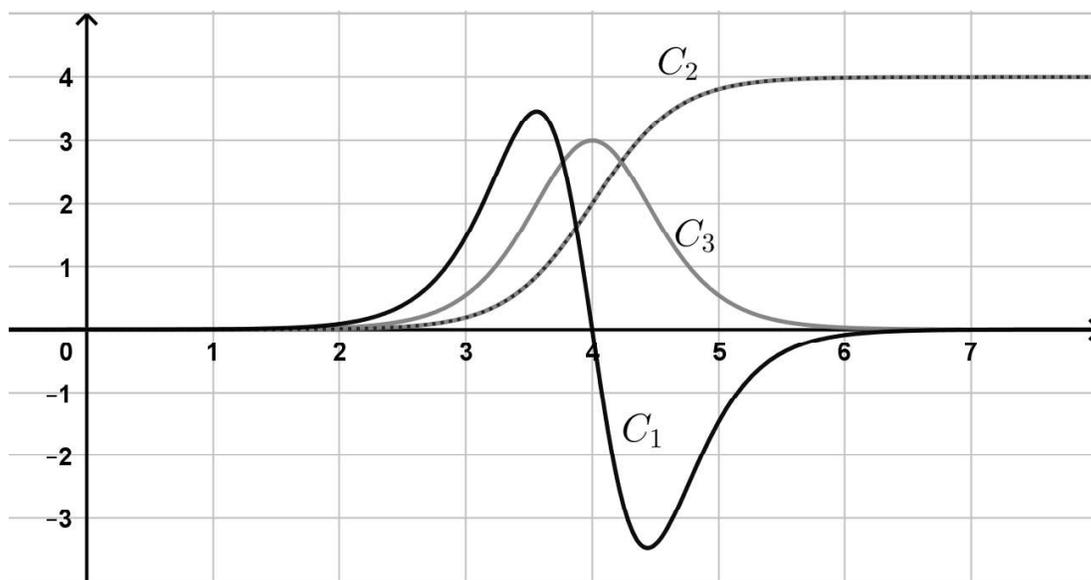
1. Justifier que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  ne sont pas parallèles.
2. Démontrer que  $\mathcal{D}$  est la droite d'intersection de  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .
3.
  - a. Vérifier que  $A$  n'appartient pas à  $\mathcal{P}_1$ .
  - b. Justifier que  $A$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}$ .
4. Pour tout réel  $t$ , on note  $M$  le point de  $\mathcal{D}$  de coordonnées  $(1 + 2t; -t; 3 - 2t)$ .  
On considère alors  $f$  la fonction qui à tout réel  $t$  associe  $AM^2$ , soit  $f(t) = AM^2$ .
  - a. Démontrer que pour tout réel  $t$ , on a :  $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$
  - b. Démontrer que la distance  $AM$  est minimale lorsque  $M$  a pour coordonnées  $(3; -1; 1)$ .
5. On note  $H$  le point de coordonnées  $(3; -1; 1)$ . Démontrer que la droite  $(AH)$  est perpendiculaire à  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 3 (5 points)****Thème : étude de fonctions**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

**Partie A.**

Le plan est ramené à un repère orthogonal. On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur  $\mathbf{R}$ , ainsi que celle de sa dérivée  $f'$  et de sa dérivée seconde  $f''$ .



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $C_2$  au point d'abscisse 4.
3. Donner, avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe  $C_1$ .

## Partie B.

Soit un réel  $k$  strictement positif. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbf{R}$  par :

$$g(x) = \frac{4}{1 + e^{-kx}}$$

1. Déterminer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. Prouver que  $g'(0) = k$ .
3. En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de  $g$  admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

▶ Calcul formel	
1	$g(x) = 4 / (1 + e^{-kx})$ $\rightarrow g(x) = \frac{4}{e^{-kx} + 1}$
2	Simplifier( $g''(x)$ ) $\rightarrow g''(x) = -4 e^{kx} (e^{kx} - 1) \frac{k^2}{(e^{kx} + 1)^3}$

**Exercice 4. (5 points)****Thème : suites, fonction logarithme, algorithmique**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- Affirmation** : La suite  $u$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$  est bornée.
- Affirmation** : Toute suite bornée est convergente.
- Affirmation** : Toute suite croissante tend vers  $+\infty$ .
- Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ .  
**Affirmation** : La fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $[-3 ; 1]$ .
- On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste  $L$  de nombres en paramètre. On rappelle que `len(L)` renvoie la longueur, c'est-à-dire le nombre d'éléments de la liste  $L$ .

```
def mystere(L) :  
    M = L[0]  
    #On initialise M avec le premier élément de la liste L  
    for i in range(len(L)) :  
        if L[i] > M :  
            M = L[i]  
    return M
```

**Affirmation** : L'exécution de `mystere([2,3,7,0,6,3,2,0,5])` renvoie 7.