

Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour Métropole Antilles Guyane
Lundi 20 Mars 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 | c'est le QCM.

Les bonnes réponses sont : 1 → B

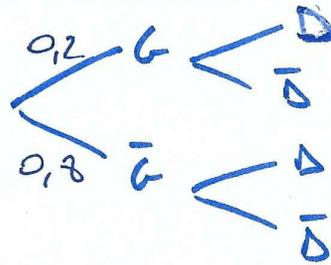
2 → B

3 → B

4 → B

5 → C

Voici quelques explications même si elles ne sont pas demandées.
pour les questions 1; 2 et 3, on va s'aider de l'arbre :



et on nous donne

$$p(D \cap G) = 0,2\% = \boxed{0,002}$$

$$\text{et } p(D) = 2,2\% = \boxed{0,022}$$

Question 1 : on cherche $p_G(D) = \frac{p(D \cap G)}{p(D)} = \frac{0,002}{0,022} = 0,0909 \rightarrow \boxed{B}$

Question 2 : on cherche $p(\bar{G} \cap D)$

→ on utilise la formule des probabilités totales

$$p(D) = p(G \cap D) + p(\bar{G} \cap D)$$

$$\text{et donc } p(\bar{G} \cap D) = 0,022 - 0,002 = 0,02 \rightarrow \boxed{B}$$

Question 3 : on cherche $p_D(G) = \frac{p(D \cap G)}{p(D)} = \frac{0,002}{0,022} \approx 0,0909 \rightarrow \boxed{B}$

pour la question 4, on prend $n = 50$

$$\text{on calcule } p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) \approx 0,789 \rightarrow \boxed{B}$$

Question 5 : la variable X représente le nombre de machines défectueuses → on veut que toutes les machines fonctionnent et donc aucune défectueuse → on veut $p(X=0) > 0,4$ et, en testant les valeurs proposées, cela est vérifié jusqu'à $n = 10 \rightarrow \boxed{C}$

Exercice 2

① on a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 3 \ln x = \boxed{+\infty}$
 $-(-\infty) \rightarrow +\infty$

② avec les croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - 3 \frac{\ln x}{x^2} \right) = \boxed{+\infty}$
 $\underbrace{\quad}_{+ \infty} \quad \underbrace{\quad}_{\frac{0}{+\infty} \rightarrow 0} \rightarrow 1$

③ on a $f(x) = x^2 - 3 \ln x$

$\rightarrow f'(x) = 2x - 3 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3}{x} = \boxed{\frac{2(x^2 - 1.5)}{x}}$

④ $x^2 - 4$ est un trinôme qui s'annule en -2 et en 2
 (mais, attention, -2 ne sera pas dans le tableau)

\rightarrow on obtient

x	0	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	-	0	+
x	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

$f(2) = 2^2 - 3 \ln 2 = 4 - 3 \ln 2 \approx -1,5$

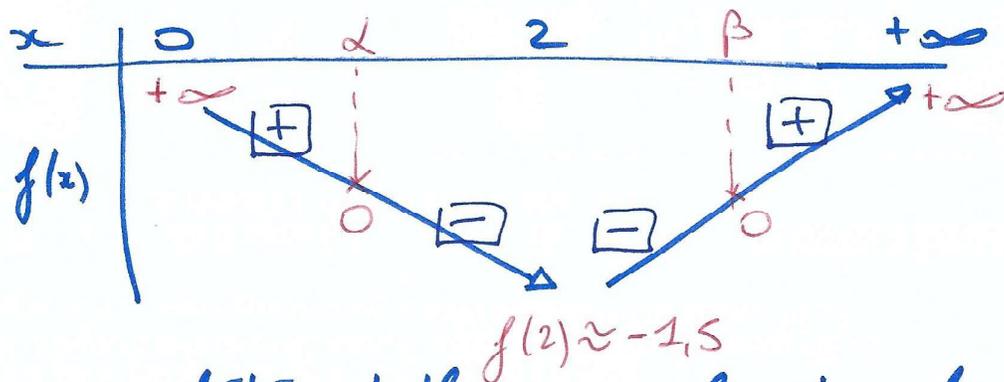
⑤ f est continue et strictement croissante sur $]0; 2]$

on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{+\infty}$

et $f(2) \approx \boxed{-1,5} < 0$

\rightarrow Le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $[f(2); +\infty[$ et, en appliquant le corollaire du TVI, on montre que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur $]0; 2]$.

6) avec $\alpha \in]0; 2]$ et $\beta \in [2; +\infty[$,
on obtient le tableau de variations suivant :



→ on a complété le tableau avec les signes de f et on en déduit :

x	0	α	2	β	$+\infty$
signes de $f(x)$	+	0	-	0	+

7) on veut $g_R(x) \geq 0$
soit $x^2 - 2px + k \geq 0$
soit $x^2 - 2px \geq -k$
c'est à dire $f(x) \geq -k$.

or, on a, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) \geq f(2)$

Donc on prendra $-k = f(2)$

soit $\boxed{k = -f(2)}$

Exercice 3

Partie A

① on a $U_2 = 0,9 \times U_1 + 1,3 = 0,9 \times 3 + 1,3 = \boxed{4}$
 et $U_3 = 0,9 \times U_2 + 1,3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = \boxed{4,9}$

② Init : on a $U_1 = \boxed{3}$
 et on calcule $U_2 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^1 = 13 - 10 = \boxed{3}$ **OK**

Hérédité : on suppose $U_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$

on obtient $U_{n+1} = 0,9 U_n + 1,3$
 $= 0,9 \times (13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n) + 1,3$
 $= 0,9 \times 13 - \frac{100}{9} \times (0,9 \times 0,9^n) + 1,3$

bien regroupé comme cela pour faire apparaître $0,9^{n+1}$

$\hookrightarrow U_{n+1} = 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} + 1,3$
 $= 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}$ **OK**

③ on calcule $U_{n+1} - U_n = \cancel{13} - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} - (\cancel{13} - \frac{100}{9} \times 0,9^n)$
 $= -\frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} + \frac{100}{9} \times 0,9^n$
 $= \frac{100}{9} \times 0,9^n \underbrace{(-0,9 + 1)}_{(0,1)} > 0$

\hookrightarrow on a $U_{n+1} - U_n > 0$
 Donc la suite (U_n) est croissante.

④ on obtient $\boxed{n = 9}$

\hookrightarrow à partir du 9^e mois, le nombre de questions dépassera $9,5 \times 100 = 950$ questions !!

Partie B

① on a $V_1 = 9 - 6 \times e^{-0,19(1-1)} = 9 - 6 \times e^0 = 9 - 6 \times 1 = \boxed{3}$
 et $V_2 = 9 - 6 \times e^{-0,19(2-1)} = 9 - 6 \times e^{-0,19} \approx \boxed{4,04}$

② on résout $V_n > 8,5$

$$\text{soit } 9 - 6 \times e^{-0,19(n-1)} > 8,5$$

$$\text{soit } -6e^{-0,19(n-1)} > -0,5$$

$$\text{soit } e^{-0,19(n-1)} < \frac{0,5}{6}$$

on a divisé par (-6) qui est négatif donc inversion de l'inégalité et $\frac{-0,5}{-6} = \frac{0,5}{6}$

$$\text{on obtient: } \ln e^{-0,19(n-1)} < \ln\left(\frac{0,5}{6}\right)$$

$$\rightarrow -0,19(n-1) < \ln\left(\frac{0,5}{6}\right) \rightarrow n-1 > \frac{\ln\left(\frac{0,5}{6}\right)}{-0,19}$$

$$\text{c'est à dire } n > \frac{\ln\left(\frac{0,5}{6}\right)}{-0,19} + 1 \approx 14,08$$

nouvelle inclusion !!

→ donc on prend $n = 15$ ici !

Partie C

② 350 questions, cela correspond à chercher quand les termes des suites (U_n) et (V_n) dépassent 8,5

→ pour (U_n) , on a obtenu à partir du rang 9

et pour (V_n) , on a obtenu à partir du rang 15

Donc le plus tôt sera pour (U_n) de la partie A ($9 < 15$!)

② à long terme → on calcule les limites en $+\infty$

modèle A

$$13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^n$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$
car $-1 < 0,9 < 1$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \boxed{13}$$

modèle B

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -0,19(n-1) = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-0,19(n-1)} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 9 - 6e^{-0,19(n-1)} = 9$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \boxed{9}$$

Donc, le plus grand nombre de questions correspond à la suite (U_n) du modèle A.

Exercice 4

① on a $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

② le vecteur directeur \vec{EC} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-0=1 \\ 1-0=1 \\ 0-1=-1 \end{pmatrix}$

→ on obtient (EC) $\begin{cases} x = 0 + k \times 1 = k \\ y = 0 + k \times 1 = k \\ z = 1 + k \times (-1) = 1-k \end{cases}$

point E \vec{EC}

③ on montre que \vec{EC} est \perp à deux vecteurs de (GBD)

→ on a B $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et D $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $\vec{GB} \begin{pmatrix} 1-1=0 \\ 0-1=-1 \\ 0-1=-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{GD} \begin{pmatrix} 0-1=-1 \\ 1-1=0 \\ 0-1=-1 \end{pmatrix}$

on calcule $\vec{EC} \cdot \vec{GB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 0$

et $\vec{EC} \cdot \vec{GD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + (-1) \times (-1) = 0$

Donc on a bien $\vec{EC} \cdot \vec{GB} = 0$ soit $\vec{EC} \perp \vec{GB}$
et $\vec{EC} \cdot \vec{GD} = 0$ soit $\vec{EC} \perp \vec{GD}$.

④ a) \vec{EC} sera un vecteur normal au plan (GBD)

→ ses coordonnées sont $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans $ax+by+cz+d=0$!

on obtient: $1x+1y+(-1)z+d=0 \rightarrow \boxed{x+y-z+d=0}$

or $G \in$ (GBD) donc $\underset{x_G}{1} + \underset{y_G}{1} - \underset{z_G}{1} + d = 0 \rightarrow 1+d=0 \rightarrow d=-1$

→ on obtient bien l'équation $\boxed{x+y-z-1=0}$

b) on cherche l'intersection entre une droite et un plan

→ on "met" la droite (EC) dans le plan (GBD).

on obtient: $k+k-(1-k)-1=0$

soit $k+k-1+k-1=0 \rightarrow 3k-2=0 \rightarrow k=\frac{2}{3}$

et on obtient le point $\pm \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$

c) on calcule $EI = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2}$

$\rightarrow EI = \sqrt{\frac{12}{9}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

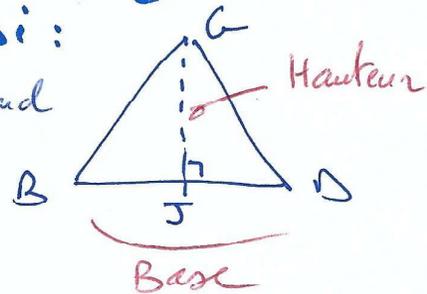
5) a) on a bien $BD = DG = GB$ car ces 3 longueurs sont, toutes les 3, la diagonale d'un carré de côté 1.

\rightarrow pour information, on a $BD = DG = GB = \boxed{\sqrt{2}}$

b) Le point J aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

et le triangle BGD se présente ainsi :

⚠ la hauteur issue du point G correspond bien à la médiane, à la médiatrice...



on a : Aire BGD = $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

\rightarrow Aire BGD = $\frac{BD \times GJ}{2}$ avec $BD = \sqrt{2}$
 et $GJ = \sqrt{(0,5-1)^2 + (0,5-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$
 $= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

6) on a donc : Volume $EGBD = \frac{1}{3} \times \underbrace{\text{Aire BGD}}_{\text{Base de EGBD}} \times \underbrace{EI}_{\text{Hauteur associée}}$.

\rightarrow on obtient le volume égal à :

$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$