Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
pour Métropole Antilles Guyane
Mardi 21 Mars 2023

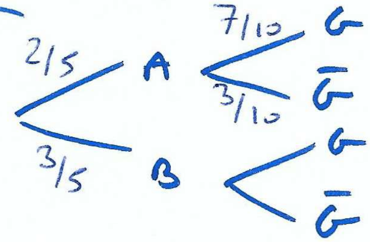
Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 c'est le QCM.

Les réponses sont : 1 → C
2 → B
3 → C
4 → B
5 → D

Voici quelques explications même si ce n'est pas demandé.

Questions 1 et 2 : on peut s'aider d'un arbre de probabilité



$p(G) = \frac{12}{25}$

1 on cherche $p(A \cap G) = p(A) \times p_A(G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \boxed{\frac{7}{25}} \rightarrow \boxed{C}$

2 on cherche $p_B(G) = \frac{p(B \cap G)}{p(B)}$

avec $p(B) = 1 - p(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

et on obtient $p(B \cap G)$ avec les probabilités totales

car on a $\underbrace{p(G)}_{\frac{12}{25}} = p(B \cap G) + \underbrace{p(A \cap G)}_{\frac{7}{25}}$

soit $p(B \cap G) = \frac{12}{25} - \frac{7}{25} = \frac{5}{25}$

et on obtient $p_B(G) = \frac{5/25}{3/5} = \boxed{\frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{B}$

Questions 3 et 4 et 5

on a ici une loi binomiale de paramètres

$n = 10$ et $p = p(G) = \frac{12}{25}$

3 on cherche $p(X = 6)$ et on obtient 0,18779…

soit environ 0,188 → $\boxed{C}$

$\boxed{4}$ on cherche n tel que $p(X \leq n) \approx 0,207$
et il suffit de tester chaque valeur de n proposée.
et on obtient $p(X \leq 3) \approx 0,207 \rightarrow \boxed{B}$

$\boxed{5}$ on cherche $p(X \geq 1)$ qui est égale à $1 - p(X=0)$
c'est à dire $1 - \underbrace{\binom{10}{0}}_{=1} \underbrace{p^0}_{=1} (\underbrace{1-p}_{1-\frac{12}{25}=\frac{13}{25}})^{10} \rightarrow 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10} \rightarrow \boxed{D}$

Exercice 2

Partie A

1) on a une augmentation de 60%, c'est à dire un coefficient multiplicateur égal à $\left(1+\frac{60}{100}\right) = 1,6$

soit une suite géométrique de raison 1,6 et avec $U_0 = 0,1$

→ on obtient $U_n = U_0 \times q^{(n-0)} = \boxed{0,1 \times 1,6^n}$

2) on a $1,6 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,6^n = +\infty$ → $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \boxed{+\infty}$

3) on cherche $U_n > 0,4$

soit $0,1 \times 1,6^n > 0,4$ $\quad 0,4 \div 0,1$

soit $1,6^n > 4$

→ on obtient $\ln 1,6^n > \ln 4$

soit $n \times \ln 1,6 > \ln 4$ → $n > \frac{\ln 4}{\ln 1,6}$ $\approx 2,94$

→ le plus entier cherché est donc $\boxed{3}$.

4) Après trois mois, on dépasse déjà 0,4 (millions) = 400 000 et après le nombre d'insectes tend vers $+\infty$

Donc l'équilibre ne sera pas préservé !!

Partie B

1) on calcule $v_1 = 1,6v_0 - 1,6v_0^2 = 1,6\times 0,1 - 1,6\times 0,1^2$

→ $v_1 = 0,144$ (millions) → $\boxed{144\,000 \text{ insectes}}$

2) a) on résout $f(x) = x$ → $1,6x - 1,6x^2 = x$

soit $1,6x - x - 1,6x^2 = 0$

soit $0,6x - 1,6x^2 = 0$

on va factoriser par x plutôt que résoudre un trinôme avec Δ !

on obtient : $x(0,6 - 1,6x) = 0$

$x = \boxed{0}$ ou $0,6 - 1,6x = 0$

$x = \frac{-0,6}{-1,6} = \boxed{\frac{3}{8}} = \boxed{0,375}$

b) on a $f'(x) = 1,6 - 1,6\times 2x = 1,6 - 3,2x$

et le tableau de signes de cette fonction affine est :

x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
$1,6-3,2x$		$+$	0	$-$	

Donc, sur $[0 ; 1/2]$, on a bien $f'(x) \geq 0$
et donc f est bien croissante sur $[0 ; 1/2]$.

[3] a) <u>Init</u> : on a $v_0 = 0{,}1$ et $v_1 = 0{,}144$

Donc on a bien $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq 1/2$ OK

<u>Hérédité</u> : on suppose $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$
et on applique la fonction f qui est croissante sur $[0 ; 1/2]$
et donc qui CONSERVE l'ordre.

on obtient $f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(1/2)$

soit $\underset{f(0)=0}{0} \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \underset{f(1/2)=0{,}4}{0{,}4}$ ($\leq 0{,}5$!!) OK

b) La suite est donc <u>croissante</u> (car $v_n \leq v_{n+1}$) et <u>majorée</u> (car $v_n \leq 1/2$) → la suite (v_n) est <u>convergente</u>.

c) La fonction f étant continue et puisque $v_{n+1} = f(v_n)$, on sait que la limite l va vérifier l'équation $\boxed{f(l) = l.}$
et d'après la question 2) a), la solution ne peut être que 0 ou 0,375. or $v_0 = 0{,}1$ et (v_n) est croissante
donc on aura $l = 0{,}375$ (millions) = 375 000 insectes

→ équilibre préservé ici !!

[4] a) L'algorithme ne va jamais s'arrêter ici !
car la condition $v < 0{,}4$ sera toujours vérifiée,
la suite étant toujours inférieur à 0,4 !!

b) on obtient $\boxed{n = 6}$
→ le nombre d'insectes dépassera 0,35 (millions)
soit 350 000 à partir du 6e mois.

Exercice 3

$a=2 \quad b=1 \quad c=-1$

1) a) avec l'équation $2x+y-z+2=0$, on a $\boxed{\vec{n}_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}$

b) on calcule $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=2\times1+1\times(-1)+(-1)\times1$

et on obtient $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$, soit $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$, soit $\boxed{P_1\perp P_2}$

2) a) on utilise le vecteur normal $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ pour obtenir

$$\underset{a}{1}\times x+\underset{b}{(-1)}\times y+\underset{c}{1}\times z+d=0 \longrightarrow \boxed{x-y+z+d=0}$$

or, on a $B\in P_2$ et donc $\underset{x_B}{1}-\underset{y_B}{1}+\underset{z_B}{2}+d=0 \longrightarrow \boxed{d=-2}$

On en déduit pour P_2 : $\boxed{x-y+z-2=0}$

b) une idée peut être de prendre deux points de Δ (avec deux valeurs du paramètre t) et de vérifier que ces deux points sont bien dans P_1 et P_2

↳ avec $\boxed{t=0}$, on obtient $I_1\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ et avec $\boxed{t=1}$, $I_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

et on vérifie :

$I_1\in P_1$ car $2\times0+(-2)-0+2=0$ OK

$I_2\in P_1$ car $2\times0+(-1)-1+2=0$ OK

et de même

$I_1\in P_2$ car $0-(-2)+0-2=0$ OK

$I_2\in P_2$ car $0-(-1)+1-2=0$ OK

Donc la droite Δ appartient bien au plan P_1 et au plan P_2 → Δ est bien l'intersection de P_1 et P_2.

3) a) on calcule $AM_t=\sqrt{(x_{M_t}-x_A)^2+(y_{M_t}-y_A)^2+(z_{M_t}-z_A)^2}$

$$\longrightarrow AM_t=\sqrt{(0-1)^2+(-2+t-1)^2+(t-1)^2}$$

$$=\sqrt{(-1)^2+(t-3)^2+(t-1)^2}$$

$$=\sqrt{1+t^2-6t+9+t^2-2t+1}=\boxed{\sqrt{2t^2-8t+11}}$$

b) AH correspond à la distance entre A et son projeté orthogonal sur Δ → cela correspond à la valeur minimale de AM_t → on cherche le minimum du trinôme $2t^2-8t+11$, qui est atteint en $-\frac{b}{2a}$ (rappel de 1ère)

soit pour $t = \frac{-(-8)}{2\times 2} = 2$ → $AH = \sqrt{2\times 2^2 - 8\times 2 + 11} = \boxed{\sqrt{3}}$

4) a) $\mathcal{D}_1$ a donc pour vecteur directeur $\vec{n_1}$ et passe par A.

↳ on obtient $\mathcal{D}_1$ $\begin{cases} x = 1 + k\times 2 = 1+2k \\ y = 1 + k\times 1 = 1+k \\ z = 1 + k\times(-1) = 1-k \end{cases}$

point A   vecteur $\vec{n_1}$

b) Le point H_1 correspond au point d'intersection entre $\mathcal{D}_1$ et P_1 → on "met" la droite dans l'équation du plan.

On a : $2(1+2k) + 1+k - (1-k) + 2 = 0$

→ $2+4k+1+k-1+k+2 = 0$

→ $6k+4=0$ → $k = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

et on obtient H_1 $\begin{cases} x = 1+2\times(-\frac{2}{3}) = \boxed{-1/3} \\ y = 1+(-2/3) = \boxed{1/3} \\ z = 1-(-2/3) = \boxed{5/3} \end{cases}$

5) Je propose le raisonnement suivant :

- on a $P_1 \perp P_2$ → donc on a $\overrightarrow{AH_1} \perp \overrightarrow{AH_2}$ → angle droit en A

- on calcule $\overrightarrow{AH_1}\begin{pmatrix} -1/3-1 = -4/3 \\ 1/3-1 = -2/3 \\ 5/3-1 = 2/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{H_2H}\begin{pmatrix} 0-4/3 = -4/3 \\ 0-2/3 = -2/3 \\ 2-4/3 = 2/3 \end{pmatrix}$

donc on a $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{H_2H}$

donc AH_1HH_2 est un parallélogramme

et comme il y a un angle droit en A

on peut conclure que AH_1HH_2 est un rectangle.

Exercice 4

1 a) en $-\infty$, on a $(-x)$ qui tend vers $+\infty$

donc e^{-x} va tendre vers $+\infty$

et on a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1+e^{-x}) = \boxed{+\infty}$

b) en $+\infty$, on a $(-x)$ qui tend vers $-\infty$

donc e^{-x} va tendre vers 0

et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln 1 = \boxed{0}$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = 0$

c) on applique la formule $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1+e^{-x}$

$u'(x) = -e^{-x}$

$\to f'(x) = \boxed{\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}} = \dfrac{-e^{-x}(\times e^{x})}{(1+e^{-x})(\times e^{x})} = \dfrac{-1}{e^{x}+1}$ car $e^{-x} \times e^{x} = e^{0} = 1$

d) on a donc $f'(x) = \dfrac{-1}{e^{x}+1}$ — toujours négatif ! / — toujours positif !!

on obtient :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

2 a) on aura : $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

avec $f(0) = \ln(1+e^{-0}) = \ln(1+1) = \ln 2$

et $f'(0) = -\dfrac{1}{e^{0}+1} = -\dfrac{1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

soit pour T_0 : $\boxed{y = -\dfrac{1}{2}x + \ln 2}$

b) $f'(x)$ peut s'écrire $k \times \dfrac{1}{u(x)}$ avec $k = -1$ et $u(x) = 1+e^{x}$

$\rightsquigarrow$ on obtient $f''(x) = k \times \dfrac{-u'(x)}{u^2(x)} = -1 \times \dfrac{-e^{x}}{(1+e^{x})^2} = \dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}$

et il est évident que $f''(x)$ est strictement positif, pour tout x.

→ la fonction f est donc CONVEXE sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction étant convexe sur $\mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ se retrouve au-dessus de ses tangentes.

↪ donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T_0

et donc $\boxed{f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2}$

$\boxed{3}$ a) on a $f(x) - f(-x) = \ln(1+e^{-x}) - \ln(1+e^{x})$

$$= \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^{x}}\right) = \ln\left(\frac{1+1/e^{x}}{1+e^{x}}\right)$$

→ on obtient $\ln\left(\frac{\frac{\cancel{e^x+1}}{e^x}}{\cancel{1+e^x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^x}\right) = \ln(e^{-x}) = \boxed{-x}$

b) Les droites seront parallèles si leurs coefficients directeurs sont égaux.

↪ pour T_0, on a $y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$ → $\boxed{\text{coef} = -\frac{1}{2}}$

et pour (M_aN_a), on utilise $\frac{y_{N_a} - y_{M_a}}{x_{N_a} - y_{M_a}}$

d'après le calcul précédent !

$$= \frac{f(a) - f(-a)}{a-(-a)} = \frac{-a}{2a} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

→ $\boxed{\text{OK}}$