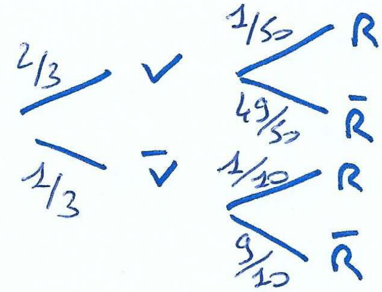
Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
Amérique du Nord 2022

Exercice 1

① ⓐ



ⓑ Avec la formule des proba. totales, on a :

$$p(R) = p(V \cap R) + p(\bar{V} \cap R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{7}{150}}$$

ⓒ on cherche $P_R(V) = \dfrac{P(R \cap V)}{P(R)} = \dfrac{2/3 \times 1/50}{7/150} = \boxed{\dfrac{2}{7}}$

② ⓐ c'est une loi binomiale avec $n = 20$

et $p = p(V) = \frac{2}{3}$

ⓑ on a $p(X = 10) \simeq \boxed{0{,}054}$ (avec binomFdp)

ⓒ on cherche $p(X \geq 10) = 1 - p(X \leq 9) \simeq \boxed{0{,}962}$

binomFRep

ⓓ on utilise l'espérance mathématiques.

Pour une loi binomiale, $E(X) = n \times p = 20 \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{40}{3}}$

soit environ $\boxed{13 \text{ jours}}$

③ on aura $E(X) = \sum_i p_i k_i = p_1 k_1 + p_2 k_2 + \dots + p_5 k_5$

$= 0{,}14 \times 10 + \dots + 0{,}07 \times 18$

$= \underline{\underline{13{,}5}}$ min ⚠ on est bien en minutes ici.

→ en moyenne, Paul mettra 13,5 minutes (soit 13 minutes 30 sec) pour se rendre à la gare.

Exercice 2

① ⓐ **Init** $T_0 = 180 \geq 20 \to$ OK

Hérédité on suppose $T_n \geq 20$

$\to 0,955\,T_n \geq 19,1$ $0,955 \times 20$

$\to 0,955\,T_n + 0,9 \geq 20$

soit $T_{n+1} \geq 20 \to$ OK

ⓑ $T_{n+1} - T_n = 0,955\,T_n + 0,9 - T_n$ $-0,045 \times (-20) = +0,9$

$= -0,045\,T_n + 0,9 = -0,045\,(T_n - 20)$

or $T_n \geq 20$ soit $T_n - 20 \geq 0$ et donc $T_{n+1} - T_n \leq 0$

Donc (T_n) est $\boxed{\text{décroissante}}$

ⓒ (T_n) est décroissante et minorée (par 20).

Donc elle est $\boxed{\text{convergente}}$

② ⓐ On a $T_{n+1} = 0,955\,T_n + 0,9$

$U_n = T_n - 20$

soit $T_n = U_n + 20$

$\to$ on aura $U_{n+1} = T_{n+1} - 20$

$= 0,955\,T_n + 0,9 - 20$

$= 0,955\,(U_n + 20) - 19,1$

$= 0,955\,U_n + \underbrace{0,955 \times 20 - 19,1}_{0}$

soit $\boxed{U_{n+1} = 0,955\,U_n}$

$\to$ suite géo. de raison $0,955$ et $U_0 = T_0 - 20 = 160$

ⓑ on aura donc $U_n = U_0 \times q^{(n-0)} = 160 \times 0,955^n$

et $\boxed{T_n} = U_n + 20 = \boxed{160 \times 0,955^n + 20.}$

ⓒ on a $-1 < 0,955 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,955^n = 0$

et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 20}$

d) on résout $T_n \leq 120$

soit $20 + 160 \times 0,955^n \leq 120$

$\rightarrow \quad 0,955^n \leq \frac{100}{160} \rightarrow \ln 0,955^n \leq \ln\left(\frac{100}{160}\right)$

$\rightarrow n \times \ln 0,955 \leq \ln\left(\frac{100}{160}\right)$

$\rightarrow n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{100}{160}\right)}{\ln 0,955} \approx 10,2$

inversion car $\ln 0,955$ est négatif.

$\rightarrow$ à partir de $n = 11$!!

3) a) La température ambiante est de 20°C et elle correspondra à la "limite" de la température !

b) on reconnait un algorithme qui correspond à la question du 2) d).

on obtient $\boxed{11}$.

$\rightarrow$ la température du gateau sera inférieure à 120°C à partir de 11 minutes.

Exercice 3

① ⓐ on calcule $\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{JL} = \left|\begin{matrix}-1\\2\\0\end{matrix}\right. \cdot \left|\begin{matrix}-4\\-2\\-3\end{matrix}\right. = 0 \to \boxed{JK \perp JL}$

ⓑ on aura $\text{Aire}_{JKL} = \dfrac{JK \times JL}{2} = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{29}}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{145}}{2}}$

avec $JK = \sqrt{(x_K - x_J)^2 + \ldots\ldots}$

ⓒ on peut utiliser la trigo de "collège" dans un triangle rectangle ou appliquer le travail vu cette année

$\to \quad \overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{KL} = KJ \times KL \times \cos(\widehat{JKL})$

$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-4\\-3\end{pmatrix} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt{34}$

$= \boxed{5}$

soit $\quad 5 = \sqrt{5}\times\sqrt{34}\times\cos(\widehat{JKL})$

soit $\quad \widehat{JKL} = \cos^{-1}\left(\dfrac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{34}}\right) \approx \boxed{67{,}5^\circ}$

② ⓐ on calcule $\vec{n}\cdot\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix}6\\3\\-10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = 0$

et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{JL} = \begin{pmatrix}6\\3\\-10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix} = 0$

ⓑ on aura pour (JKL) : $6x + 3y - 10z + d = 0$

si $J \in (JKL) \to 6\times 2 + 3\times 0 - 10\times 1 + d = 0$

$\to \quad 2 + d = 0 \to d = -2$

on obtient : $\boxed{6x + 3y - 10z - 2 = 0}$

③ ⓐ on aura Δ $\begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \\ z = -6 - 10t \end{cases}$

point T le vecteur $\vec{n}$ est directeur pour Δ.

b) Le point H correspond à l'intersection de Δ et de (JKL)

→ on "met" Δ dans l'équation de (JKL)

→ $6(10+6t)+3(9+3t)-10(-6-10t)-2=0$

→ $145+145t=0$ → $t=-1$

On obtient : H $\begin{cases} x = 10+6\times(-1) = 4 \\ y = 9+3\times(-1) = 6 \\ z = -6-10\times(-1) = 4 \end{cases}$

c) JKL est la base → on connait son aire.

La hauteur sera alors TH.

→ $TH = \sqrt{(x_H - x_T)^2 + \ldots} = \sqrt{6^2+3^2+(-10)^2}$

→ $TH = \sqrt{145}$

soit volume $= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145} = \frac{145}{6}$ cm^3

(≈ 24 cm^3)

Exercice 4

Les réponses sont :
1. VRAI
2. VRAI
3. VRAI
4. FAUX
5. FAUX
6. VRAI

→ voici quelques éléments de réponse !! ⚠

1 on a $1-\dfrac{1-e^{x}}{1+e^{x}}=\dfrac{1+e^{x}}{1+e^{x}}-\dfrac{1-e^{x}}{1+e^{x}}=\dfrac{1+e^{x}-1+e^{x}}{1+e^{x}}=\dfrac{2e^{x}}{1+e^{x}}$

et $\dfrac{2}{1+e^{-x}}=\dfrac{2}{1+\frac{1}{e^{x}}}=\dfrac{2}{\frac{e^{x}+1}{e^{x}}}=2\times\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}=\dfrac{2e^{x}}{1+e^{x}}$ → OK

2 on peut voir une application des valeurs intermédiaires

car $g'(x)=\dfrac{e^{x}(e^{x}+1)-e^{x}(e^{x})}{(e^{x}+1)^{2}}=\dfrac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}>0$

Donc g est croissante et $g(0)=\frac{1}{2}$

→

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↗	$1/2$	↗

solution unique !

ou on résout directement

$\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}=\dfrac{1}{2}\rightarrow 2e^{x}=e^{x}+1\rightarrow e^{x}=1\rightarrow \boxed{x=0}$

3 cela revient à résoudre $f(x)=0$ (la tangente est "sur" l'axe des abscisses)

et $f'(x)=0$ (la tangente est "horizontale")

→ $f(x)=0\rightarrow x^{2}e^{-x}=0\rightarrow x^{2}=0\rightarrow \boxed{x=0}$

→ $f'(x)=2xe^{-x}-x^{2}e^{-x}=e^{-x}\underbrace{(2x-x^{2})}$

2 solutions $\boxed{x=0}$ et $\boxed{x=2}$

Donc, pour avoir les deux conditions, il n'y a qu'une seule possibilité → $\boxed{\text{VRAI}}$

④ on a $h'(x) = e^x(1-x^2) + e^x(-2x)$

$$= e^x(1-2x-x^2)$$

et $h''(x) = e^x(1-2x-x^2) + e^x(-2-2x)$

$$= e^x(1-2x-x^2-2-2x)$$

$$= e^x(\underbrace{-1-4x-x^2}_{\Delta = 12 > 0})$$

$\Delta = 12 > 0 \rightarrow$ 2 solutions et donc ici 2 points d'inflexion.

⑤ $\dfrac{e^x}{e^x+x} = \dfrac{e^x}{e^x\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{e^x}}$

$\dfrac{x}{e^x} \rightarrow 0$ (croissances comparées)

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x+x} = 1$

⑥ on peut étudier $h(x) = e^{2x} - 2e^x + 1$

avec $h'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$

soit

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$h(0) = 0$

ou résoudre $X^2 - 2X + 1 \geq 0$

et faire le lien avec $X = e^x$

ou on peut remarquer que :

$$1 + e^{2x} \geq 2e^x$$

$$\rightarrow \underbrace{1 - 2e^x + e^{2x}}_{(e^x-1)^2} \geq 0$$

$\rightarrow$ Donc toujours ≥ 0 !!